ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (17/12/2004)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 20–21 dicembre; ◯ 22–23 dicembre; ◯ 10–11 gennaio.

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale x, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\, x^n\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\, \frac{(x-2)^n}{3^n+n^2}\,.$$

(7 punti)

---

2. Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int x^2 \arccos x\, dx\ , \qquad \int \arccos \sqrt[3]{2x+1}\, dx\ .$$

(7 punti)

---

3. Si determini l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1 + \cos x^2}{x + x^2}\ ,$$

$$g(x) = \frac{\alpha x^4 - 1 + \cos x^2}{x + x^\alpha}\ , \quad \text{al variare di } \alpha > 0.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos(2x) - \frac{1}{2}}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali periodicità e simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \operatorname{arctg}(n^2-2)\,, \qquad b_n = \operatorname{arctg}\left[(-1)^n(n^2-2)\right]\ , \qquad c_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi - n}\,.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (17/12/2004)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 20–21 dicembre; ◯ 22–23 dicembre; ◯ 10–11 gennaio.

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale x, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{3}{n}\right)\, x^n\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{3}{n}\right)\, \frac{(x-1)^n}{5^n+n^3}\,.$$

(7 punti)

---

2. Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int x^2 \operatorname{arcsen} x\, dx\,, \qquad \int \operatorname{arcsen} \sqrt[3]{2x-1}\, dx\,.$$

(7 punti)

---

3. Si determini l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1-\operatorname{ch} x^2 + x^4}{x^3+x}\,,$$

$$g(x) = \frac{1-\operatorname{ch} x^2 + \alpha x^4}{x^\alpha+x}\,, \quad \text{al variare di } \alpha > 0.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{2}}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali periodicità e simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \operatorname{arctg}(1-n^2)\,, \qquad b_n = \operatorname{arctg}\left[(-1)^n(1-n^2)\right]\,, \qquad c_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n-3\pi}\,.$$

(7 punti)

1. Al variare del parametro reale x, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{3}{n}\right)\, x^n\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{3}{n}\right)\, \frac{(x-1)^n}{5^n+n^3}\,.$$

Prima serie: Studiamo prima il caso $x>0$ (il caso $x=0$ è banale); in questo caso la serie è a termini positivi. Inoltre, poiché $\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\sim\frac{3}{n}$ per $n\to\infty$, basta studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. Applichiamo il criterio del rapporto (anche quello della radice va benissimo); si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{x^n}=x\,.$$

Quindi la serie converge per $0<x<1$, diverge per $x>1$ (anzi, in quest'ultimo caso i termini della serie tendono a $+\infty$; ciò sarà utile in seguito). Per $x=1$, la serie ha lo stesso carattere della serie armonica, che diverge.

Per $-1<x<0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\,|x|^n$ converge, come abbiamo visto; quindi (criterio della convergenza assoluta) la serie converge.

Per $x<-1$, si ha $\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\,|x|^n\to+\infty$, quindi la serie non può convergere. Infine per $x=-1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$. Poiché $\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$ è una successione decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz. In definitiva la serie converge per $-1\le x<1$.

Seconda serie: Conviene porre $x-1=t$, e studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\,\frac{t^n}{5^n+n^3}\,.$$

Anche qui studiamo prima il caso $t>0$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n5^n}$.

Procedendo esattamente come prima, si vede che questa serie converge per $0<t<5$, diverge per $t\ge5$.

Per $-5<t<0$ la nostra serie converge, perché converge assolutamente.

Per $t<-5$ la serie non converge, perché a termini non infinitesimi.

L'unico caso "delicato" è $t=-5$. In questo caso la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\,\frac{5^n}{5^n+n^3}$. La successione $\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\,\frac{5^n}{5^n+n^3}$ è evidentemente infinitesima, e per vedere che è definitivamente decrescente basta controllare il segno della derivata di $f(x)=\log\left(1+\frac{3}{x}\right)\,\frac{5^x}{5^x+x^3}$ per x grande. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

In definitiva la serie converge per $-5\le t<5$, cioè per $-4\le x<6$.

---

2. Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int x^2\operatorname{arcsen}x\,dx\,,\qquad \int\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{2x-1}\,dx\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\int x^2\operatorname{arcsen}x\,dx=\frac13\,\left(x^3\operatorname{arcsen}x-\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)\,.$$

Vediamo l'ultimo integrale: ponendo $x^2=t$, da cui $2x\,dx=dt$, si ottiene

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac12\int\frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt\,,$$

da cui, con la sostituzione $\sqrt{1-t}=s$ (da cui $t=1-s^2$, $dt=-2s\,ds$),

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int(s^2-1)\,ds=\frac{s^3}{3}-s+c\,.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}\int x^2\operatorname{arcsen}x\,dx&=\frac13\,\left(x^3\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}-\frac13(1-x^2)^{3/2}\right)\\&=\frac19\,\left(3x^3\operatorname{arcsen}x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\right)\,.\end{aligned}$$

In alternativa si poteva porre $x=\operatorname{sen}t$, con $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, da cui $\sqrt{1-x^2}=\cos t$, $dx=\cos t\,dt$, e quindi

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\operatorname{sen}^3t\,dt&=\int\operatorname{sen}t\,dt-\int\cos^2t\,\operatorname{sen}t\,dt\\&=-\cos t+\frac{\cos^3t}{3}+c\,,\end{aligned}$$

dove $\cos t=\sqrt{1-x^2}$.

Per il secondo integrale, con la sostituzione $\sqrt[3]{2x-1}=t$ (da cui $x=\frac{t^3+1}{2}$, $dx=\frac32t^2\,dt$), si ottiene

$$\begin{aligned}\int\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{2x-1}\,dx&=\frac32\int t^2\operatorname{arcsen}t\,dt\\&=[\text{per quanto visto prima}]\\&=\frac16\left(3t^3\operatorname{arcsen}t+\left(t^2+2\right)\sqrt{1-t^2}\right)\\&=\frac16\left((6x-3)\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{2x-1}+\right.\\&\qquad\left.+\left((2x-1)^{2/3}+2\right)\sqrt{1-(2x-1)^{2/3}}\right)\,.\end{aligned}$$

---

3. Si determini l'ordine di infinitesimo, per $x\to0$, delle seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{1-\operatorname{ch}x^2+x^4}{x^3+x}\,,$$

$$g(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x^2 + \alpha x^4}{x^\alpha + x}\ , \quad \text{al variare di } \alpha > 0.$$

a) Si ha

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$

quindi

$$\operatorname{ch} x^2 = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto

$$1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4 = \frac{x^4}{2} + o(x^6) \sim \frac{x^4}{2}\,.$$

Poiché $x^3 + x \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^4}{2x} = \frac{x^3}{2}\,.$$

Quindi f è un infinitesimo di ordine 3. Questa parte poteva essere svolta usando i limiti notevoli al posto della formula di Taylor.

b) Ragionando allo stesso modo si ottiene

$$1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4 \sim \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) x^4\,,$$

purché $\alpha \neq 1/2$. Inoltre si ha

$$x^\alpha + x \sim \begin{cases} x & \text{se } \alpha > 1 \\ 2x & \text{se } \alpha = 1 \\ x^\alpha & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto:

- se $\alpha \geq 1$, $g(x)$ è un infinitesimo di ordine 3;
- se $0 < \alpha < 1$, con $\alpha \neq 1/2$, $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $4 - \alpha$;
- se $\alpha = 1/2$, i termini di ordine 4 nel numeratore si annullano, e bisogna scrivere il successivo termine dello sviluppo di Taylor:

$$\operatorname{ch} x^2 = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^{10}) \qquad \text{per } x \to 0,$$

da cui

$$g(x) \sim -\frac{x^8}{24 x^\alpha} = -\frac{x^{15/2}}{24}\,,$$

e $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\dfrac{15}{2}$.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali periodicità e simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo.

Dominio: tutto $\mathbb{R}$.

Osserviamo che $f(x)$ è una funzione periodica di periodo π; non è né pari né dispari; **la studiamo in** $[0, \pi]$**.**

Continuità: La funzione è continua nel suo dominio, in quanto ottenuta per prodotto e composizione di funzioni continue.

Derivabilità: per lo stesso motivo, tenuto conto che la radice cubica non è derivabile nell'origine, f è derivabile in tutti i punti in cui il radicando è diverso da zero, cioè in tutti i punti diversi da $\dfrac{7\pi}{12}$ e $\dfrac{11\pi}{12}$, e si ha

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{\cos 2x}{\left(\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\right)^{2/3}}\,.$$

Esaminiamo la derivabilità in $\dfrac{7\pi}{12}$ e $\dfrac{11\pi}{12}$. Si ha

$$\lim_{x \to \frac{7\pi}{12}} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to \frac{11\pi}{12}} f'(x) = +\infty\,,$$

quindi si tratta di punti di non derivabilità (flessi a tangente verticale, rispettivamente discendente e ascendente).

Crescenza e decrescenza: Si ha

$$f'(x) = 0 \qquad \text{per } x = \frac{\pi}{4} \text{ e } x = \frac{3\pi}{4}\,;$$

$$f'(x) > 0 \qquad \text{per } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ e } \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi, \text{ con } x \neq \frac{11\pi}{12}\,;$$

$$f'(x) < 0 \qquad \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, \text{ con } x \neq \frac{7\pi}{12}\,.$$

Pertanto

- f è strettamente crescente in $\left[0\,, \dfrac{\pi}{4}\right]$ e in $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,, \pi\right]$;
- f è strettamente decrescente in $\left[\dfrac{\pi}{4}\,, \dfrac{3\pi}{4}\right]$;
- $x = \dfrac{\pi}{4}$ è punto di massimo assoluto;
- $x = \dfrac{3\pi}{4}$ è punto di minimo assoluto.

Derivata seconda, concavità e convessità: Per $x \neq \dfrac{7\pi}{12}$, $x \neq \dfrac{11\pi}{12}$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3} \frac{-2 \operatorname{sen} 2x (\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2})^{2/3} - \frac{4}{3} \cos^2 2x (\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2})^{-1/3}}{(\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2})^{4/3}} \\ &= -\frac{2}{9} \frac{6 \operatorname{sen}^2 2x + 3 \operatorname{sen} 2x + 4 \cos^2 2x}{(\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2})^{5/3}} \\ &= -\frac{2}{9} \frac{2 \operatorname{sen}^2 2x + 3 \operatorname{sen} 2x + 4}{(\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2})^{5/3}}\,, \end{aligned}$$

ed è facile vedere che il numeratore della frazione è sempre positivo. Quindi f'' non si annulla mai e ha il segno opposto rispetto al denominatore.

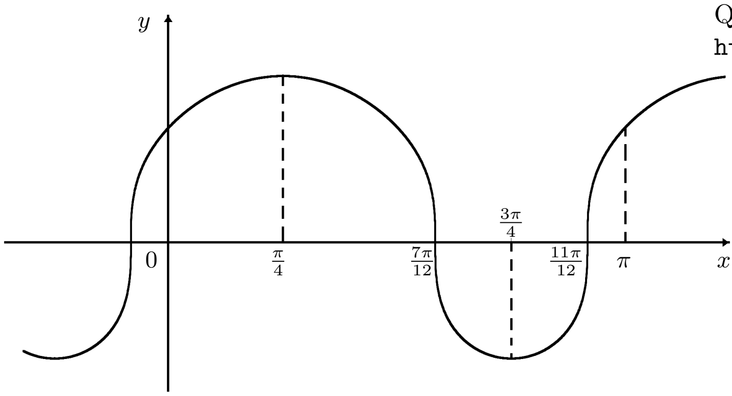
$$f''(x) > 0 \qquad \text{per } \frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}\,;$$

$$f''(x) < 0 \qquad \text{per } 0 \leq x < \frac{7\pi}{12} \text{ e } \frac{11\pi}{12} < x \leq \pi\,.$$

Pertanto

- f è convessa in $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$;
- f è concava in ciascuno degli intervalli $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ e $\left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$;
- i punti $x = \frac{7\pi}{12}$ e $x = \frac{11\pi}{12}$ sono punti di flesso.

Il grafico qualitativo di f è il seguente:



5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \operatorname{arctg}(1-n^2), \qquad b_n = \operatorname{arctg}\left[(-1)^n(1-n^2)\right],$$

$$c_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n-3\pi}.$$

La successione $\{a_n\}$ è decrescente, quindi

$$\max a_n = a_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}.$$

Non essendo specificato se gli indici della successione partano da $n = 0$ oppure da $n = 1$, anche la risposta $\max a_n = a_1 = 0$ è corretta.
La successione $\{b_n\}$ verifica

$$-\frac{\pi}{2} < b_n < \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

si ha

$$\sup b_n = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf b_n = -\frac{\pi}{2}.$$

Per quanto riguarda c_n, poiché l'arcotangente è una funzione crescente, il problema si riduce a trovare gli estremi inferiore e superiore di $\frac{1}{n-3\pi}$.

Per $n < 3\pi$, questa frazione è negativa e decrescente. Il suo valore minimo è $\frac{1}{9-3\pi}$. Per $n > 3\pi$, la frazione è positiva e decrescente. Il suo valore massimo è $\frac{1}{10-3\pi}$. Quindi

$$\max c_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{10-3\pi} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(10-3\pi),$$

$$\min c_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{9-3\pi} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(3\pi-9).$$

Cognome e nome ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}} - 1 \right) \sqrt{n}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n \right)^{\alpha}$$

($\alpha \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Calcolare gli integrali definiti:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}\, dx \ , \qquad \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2+x)(2-|x|)}\, dx \ .$$

(7 punti)

---

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3 \log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)}{\sqrt{t^2+1}} \ , \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha} \left(\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right) - 3 \operatorname{sen} \frac{1}{t^2} \right)$$

($\alpha \in \mathbf{R}$) *(7 punti)*

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2-x}{1+\log|x-2|} \ ,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Data la funzione di due variabili $f(x,y) = 4xy^2 - x - 3y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. *(6 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (12/1/2005)

Cognome e nome ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n+1}}-1\right)}{\sqrt{n}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27n^3+n}-3n\right)^{\alpha}}$$

($\alpha \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Calcolare gli integrali definiti:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-9}\,dx\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(|x|-3)(x+3)}\,dx\,.$$

(7 punti)

---

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^6+1}\left(\cos\frac{2}{t}-1\right)}{t}\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha}\left(\left(\cos\frac{2}{t}-1\right)+2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{t^2}\right)$$

($\alpha \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{\log|x+1|+1}\,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Data la funzione di due variabili $f(x,y) = 9x^2y + 3x - y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$ e $(0,1)$. *(6 punti)*

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}-1\right)\sqrt{n}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n\right)^{\alpha}$$

($\alpha \in \mathbb{R}$).

Osserviamo preliminarmente che le due serie sono a termini positivi.

Prima serie: Poiché

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\beta}-1}{t}=\beta\,,$$

si ha

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}-1=\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n^2}=\frac{1}{n^2}$$

per $n\to+\infty$. Ne segue che

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}-1\right)\sqrt{n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}\,,$$

e la serie converge per il confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3/2>1$.

Seconda serie: Si ha

$$\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n=2n\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{8n^2}}-1\right),$$

e, come prima,

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{8n^2}}-1\sim\frac{1}{8n^2}\,.$$

Quindi

$$\left(\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n\right)^{\alpha}\sim\left(\frac{2n}{8n^2}\right)^{\alpha}=\frac{1}{4^{\alpha}n^{\alpha}}\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum_n\frac{1}{n^{\alpha}}$, che converge se $\alpha>1$ e diverge altrimenti.

---

2. Calcolare gli integrali definiti:

$$\int_0^1\frac{x^2}{4-x^2}\,dx\,,\qquad\int_{-1}^1\frac{x^2}{(2+x)(2-|x|)}\,dx\,.$$

Primo integrale: Si tratta di un integrale di una funzione razionale fratta, che si risolve per scomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^2}{4-x^2}\,dx&=\int_0^1\left(-1+\frac{4}{4-x^2}\right)dx\\&=\int_0^1\left(-1+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)dx\\&=-1+\left[\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1=-1+\log 3\,.\end{aligned}$$

Secondo integrale: Ricordando la definizione di valore assoluto,

$$\int_{-1}^1\frac{x^2}{(2+x)(2-|x|)}\,dx=\int_{-1}^0\frac{x^2}{(2+x)^2}\,dx+\int_0^1\frac{x^2}{4-x^2}\,dx\,.$$

Il secondo integrale l'abbiamo già calcolato al passo precedente. Per il primo si ha:

$$\int\frac{x^2}{(2+x)^2}\,dx=\int\left(1-4\frac{x+1}{(2+x)^2}\right)dx$$
$$=\int\left(1-\frac{4}{2+x}+\frac{4}{(2+x)^2}\right)dx=x-4\log|2+x|-\frac{4}{2+x}+c\,.$$

Pertanto

$$\int_{-1}^0\frac{x^2}{(2+x)^2}\,dx=\left[x-4\log|2+x|-\frac{4}{2+x}\right]_{-1}^0=3-4\log 2\,.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $2-4\log 2+\log 3=2+\log\frac{3}{16}$.

---

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)}{\sqrt{t^2+1}}\,,\qquad\lim_{t\to+\infty}t^{\alpha}\left(\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)-3\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{t^2}\right)$$

($\alpha\in\mathbb{R}$)

Primo limite: Poiché $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, si ha

$$\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)\sim\frac{3}{t^2}\qquad\text{per } t\to+\infty.$$

D'altra parte è immediato constatare che

$$\sqrt{t^2+1}\sim t\qquad\text{per } t\to+\infty.$$

Quindi

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)}{\sqrt{t^2+1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3\cdot\frac{3}{t^2}}{t}=3\,.$$

Secondo limite: Poiché $\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)\sim\frac{3}{t^2}$ e $-3\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{t^2}\sim-\frac{3}{t^2}$, i due termini si annullerebbero, quindi occorre considerare i termini di ordine superiore. Per la formula di MacLaurin si ha:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad\text{per } x\to 0,$$
$$\mathrm{sen}\,x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\qquad\text{per } x\to 0,$$

e quindi, per $t\to+\infty$,

$$\begin{aligned}&\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)-3\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{t^2}\\&\quad=\frac{3}{t^2}-\frac{9}{2t^4}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)-\frac{3}{t^2}+\frac{1}{2t^6}+o\left(\frac{1}{t^8}\right)\\&\quad=-\frac{9}{2t^4}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)\sim-\frac{9}{2t^4}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che il limite cercato vale

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{9t^\alpha}{2t^4}\right)=\begin{cases}-\infty & \text{se } \alpha>4\\ -\dfrac{9}{2} & \text{se } \alpha=4\\ 0 & \text{se } \alpha<4\end{cases}$$

---

4. Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{2-x}{1+\log|x-2|},$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo.

Dominio: Occorre che $\log|x-2|$ sia definito e diverso da -1. Quindi il dominio è $\mathbb{R}\setminus\left\{2-\dfrac{1}{e}\,,\,2\,,\,2+\dfrac{1}{e}\right\}$.
Anche se non era richiesto lo studio del segno, può essere utile la constatazione immediata che $f(x)$ non si annulla mai, è positiva in $\left(-\infty\,,\,2-\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(2\,,\,2+\dfrac{1}{e}\right)$, negativa altrove.
Continuità e derivabilità: La funzione è continua nel suo dominio, in quanto ottenuta per rapporto/composizione di funzioni continue. Inoltre è anche derivabile nel suo dominio (il punto in cui si annulla il valore assoluto è escluso dal dominio).
Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp\infty\,,$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=0$$

(quindi $x=2$ è un punto di discontinuità eliminabile),

$$\lim_{x\to\left(2+\frac{1}{e}\right)^\pm}f(x)=\mp\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\left(2-\frac{1}{e}\right)^\pm}f(x)=\mp\infty$$

(quindi le rette $x=2\pm\dfrac{1}{e}$ sono asintoti verticali).
Asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0\,,$$

quindi non ci sono asintoti obliqui.
Derivata prima, crescenza e decrescenza: Ricordando che $D(\log|t|)=\frac{1}{t}$, si ottiene facilmente

$$f'(x)=-\frac{\log|x-2|}{(1+\log|x-2|)^2}\,.$$

Quindi

- $f'(x)=0$ per $x=1$ oppure $x=3$;
- $f'(x)>0$ per $x\in\left(1\,,\,2-\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(2-\dfrac{1}{e}\,,\,2\right)\cup\left(2\,,\,2+\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(2+\dfrac{1}{e}\,,\,3\right)$;
- $f'(x)<0$ per $x\in(-\infty\,,\,1)\cup(3\,,\,+\infty)$.

Ne segue che:

- f è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $\left[1\,,\,2-\dfrac{1}{e}\right)$, $\left(2-\dfrac{1}{e}\,,\,2\right)$, $\left(2\,,\,2+\dfrac{1}{e}\right)$, $\left(2+\dfrac{1}{e}\,,\,3\right]$
- f è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $(-\infty\,,\,1]$, $[3\,,\,+\infty)$;
- i punti $x=1$ e $x=3$ sono rispettivamente di minimo e di massimo relativo.

Inoltre si osservi che $\lim_{x\to2}f'(x)=0$, quindi se si estendesse f ponendo $f(2)=0$, si otterrebbe una funzione non solo continua, ma derivabile in $x=2$, con derivata nulla.
Derivata seconda, concavità e convessità: Si ha:

$$f''(x)=\frac{\log|x-2|-1}{(x-2)(1+\log|x-2|)^3}\,.$$

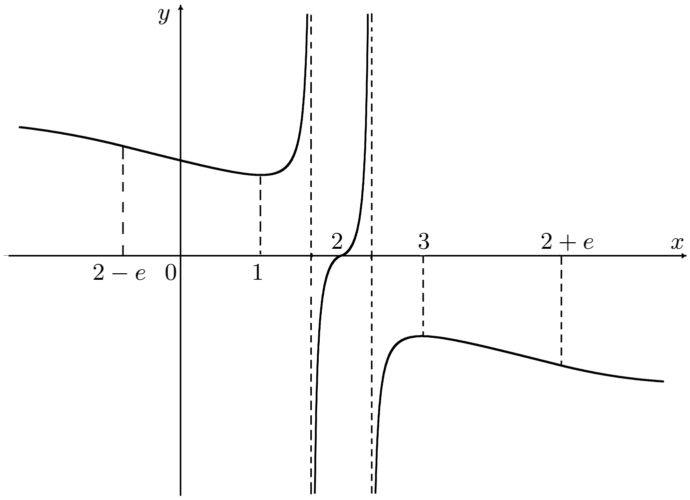
Quindi

- $f''(x)=0$ per $x=2\pm e$;
- $f''(x)>0$ per $x\in\left(2-e\,,\,2-\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(2\,,\,2+\dfrac{1}{e}\right)\cup(2+e\,,\,+\infty)$;
- $f''(x)<0$ per $x\in(-\infty\,,\,2-e)\cup\left(2-\dfrac{1}{e}\,,\,2\right)\cup\left(2+\dfrac{1}{e}\,,\,2+e\right)$.

Pertanto:

- f è convessa in ciascuno degli intervalli $\left[2-e\,,\,2-\dfrac{1}{e}\right)$, $\left(2\,,\,2+\dfrac{1}{e}\right)$, $[2+e\,,\,+\infty)$;
- f è concava in ciascuno degli intervalli $(-\infty\,,\,2-e]$, $\left(2-\dfrac{1}{e}\,,\,2\right)$, $\left(2+\dfrac{1}{e}\,,\,2+e\right]$;
- i punti $x=2\pm e$ sono punti di flesso.

Il grafico qualitativo di f è il seguente (la curvatura per $|x-2|>e$ è stata accentuata rispetto al reale grafico):



E' utile notare che lo studio avrebbe potuto essere notevolmente semplificato ponendo $x-2=t$ e studiando la funzione

$$g(t) = f(t+2) = -\frac{t}{1+\log|t|},$$

che è una funzione dispari e può pertanto essere studiata solo per $t>0$. Il grafico di f si riottiene spostando di due unità verso destra il grafico di g.

---

5. Data la funzione di due variabili $f(x,y) = 4xy^2 - x - 3y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

Calcolo le derivate parziali:

$$f_x(x,y) = 4y^2 - 1, \quad f_y(x,y) = 8xy - 3.$$

I punti critici sono quelli in cui si annullano entrambe le derivate, cioè i due punti $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. Per classificarli, studiamo l'hessiano. Si ha:

$$f_{xx}(x,y) = 0, \quad f_{xy}(x,y) = 8y, \quad f_{yy}(x,y) = 8x.$$

Pertanto $H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ in entrambi i punti critici, che risultano quindi punti di sella.
Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che f è continua e quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette sicuramente massimo e minimo assoluti sul quadrato chiuso. Tali estremi possono essere assunti solo sull'unico punto critico interno $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ oppure sulla frontiera. La frontiera è costituita da quattro segmenti, su cui la funzione vale rispettivamente

$$\varphi_1(x) = f(x,0) = -x, \qquad x \in [0,1];$$

$$\varphi_2(y) = f(1,y) = 4y^2 - 3y - 1, \qquad y \in [0,1];$$

$$\varphi_3(x) = f(x,1) = 3x - 3, \qquad x \in [0,1];$$

$$\varphi_4(y) = f(0,y) = -3y, \qquad y \in [0,1].$$

Un eventuale punto di massimo sui lati (ma distinto dai vertici) dovrebbe essere punto critico di queste funzioni interno al relativo intervallo. Solo φ_2 ammette un punto critico interno $y = \frac{3}{8}$. Inoltre vanno considerati i vertici del quadrato. Pertanto massimo e minimo assoluti di f sono da ricercare tra i seguenti sei valori:

$$f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}, \qquad f\left(1, \frac{3}{8}\right) = -\frac{25}{16},$$

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1,0) = -1,$$

$$f(0,1) = -3, \qquad f(1,1) = 0.$$

Quindi il massimo assoluto vale 0, il minimo vale -3.

Cognome e nome ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile**. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2x^{2n}}{(2n)!}$$

($x \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Calcolare gli integrali:

$$\int \operatorname{arctg}\frac{3}{x}\,dx\,, \qquad \int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}x}{\cos^3 x+4\cos x}\,dx\,.$$

(7 punti)

---

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-7n^3}}{n}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3e^{x^2})}{x^2}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}x^8\ln(1+3e^{-x^2})\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)(\ln|x-1|-2)^2\,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare gli sviluppi di MacLaurin fino al 10^0 grado delle funzioni

$$f(x) = \ln(3-2\cos x^2)\,, \qquad g(x) = \frac{\ln(3-2\cos x^2)}{1+2\operatorname{sen}x^3}\,.$$

(6 punti)

Cognome e nome ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile**. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)!\,y^{2n}}{(n!)^2}$$

($y \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Calcolare gli integrali:

$$\int \operatorname{arctg}\frac{2}{x}\,dx\,, \qquad \int \frac{\operatorname{sen}(2x)-\cos x}{\operatorname{sen} x + 9\operatorname{sen}^3 x}\,dx\,.$$

(7 punti)

---

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^3}-\sqrt{n^4-2n^3}}{n}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{10}\ln(1+2e^{-x^3})\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^{x^3})}{x^3}\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = (\ln|2-x|-2)^2(2-x)\,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare gli sviluppi di MacLaurin fino all'8^0 grado delle funzioni

$$f(x) = \ln(3-2e^{x^3})\,, \qquad g(x) = \frac{\ln(3-2e^{x^3})}{1-2\operatorname{sen} x^2}\,.$$

(6 punti)

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!\, y^{2n}}{(n!)^2}$$

($y \in \mathbb{R}$).

Prima serie: Poiché

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} < \frac{1}{2}\,,$$

la tangente è positiva, quindi la serie è a termini di segno alterno. Si ha evidentemente

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} = 0\,.$$

Inoltre $\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ è una successione decrescente; infatti la tangente è crescente nel primo quadrante, quindi la successione è decrescente se e solo se $\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ è decrescente, e questo è ovvio. Pertanto si può applicare il criterio di Leibniz e concludere che la serie converge. Si osservi che la serie non converge assolutamente, dal momento che

$$\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \sim \frac{1}{n}\,.$$

Seconda serie: Per $y = 0$ la serie converge banalmente. Per $y \neq 0$ si tratta di una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto: posto

$$a_n = \frac{(2n+1)!\, y^{2n}}{(n!)^2}\,,$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!\, y^{2n+2}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!\, y^{2n}} = \\ = \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}\, y^2 = \frac{2(2n+3)}{n+1}\, y^2 \to 4y^2\,.$$

Quindi se $4y^2 < 1$, cioè se $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$, la serie converge.
Se $4y^2 > 1$, cioè se $y < -\frac{1}{2}$ oppure $y > \frac{1}{2}$, la serie diverge.
Infine, per $y = \pm\frac{1}{2}$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, e il criterio del rapporto non fornisce conclusioni. Tuttavia si osservi che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1\,,$$

quindi a_n è crescente e non può convergere a zero, quindi la serie diverge.
In definitiva, la serie converge se e solo se $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$.

---

2. Calcolare gli integrali:

$$\int \operatorname{arctg} \frac{2}{x}\, dx\,, \qquad \int \frac{\operatorname{sen}(2x) - \cos x}{\operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sen}^3 x}\, dx\,.$$

Primo integrale: Integrando per parti, si ha

$$\int \operatorname{arctg} \frac{2}{x}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \int \frac{2x}{x^2+4}\, dx = \\ = x \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = x \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \ln(x^2+4) + c\,.$$

Secondo integrale:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x) - \cos x}{\operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sen}^3 x} \cos x\, dx = \\ \Big[\text{sost. } \operatorname{sen} x = t\,,\ \cos x\, dx = dt\Big] = \int \frac{2t-1}{t\,(1+9t^2)}\, dt = \\ \Big[\text{scomponendo in fratti semplici}\Big] \\ = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{18Bt}{1+9t^2} + \frac{C}{1+9t^2}\right) dt = \\ = A \ln|t| + B \ln(1+9t^2) + \frac{C}{3} \operatorname{arctg}(3t) + c\,.$$

Poiché si trova subito $A = -1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 2$, si ottiene:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x) - \cos x}{\operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sen}^3 x}\, dx \\ = -\ln|\operatorname{sen} x| + \frac{1}{2} \ln(1 + 9 \operatorname{sen}^2 x) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{sen} x) + c\,.$$

---

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^3} - \sqrt{n^4-2n^3}}{n}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{10} \ln(1 + 2e^{-x^3})\,, \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2e^{x^3})}{x^3}\,.$$

Primo limite: A numeratore c'è una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Conviene razionalizzare:

$$\frac{\sqrt{n^4+3n^3} - \sqrt{n^4-2n^3}}{n} \\ = \frac{\sqrt{n^4+3n^3} - \sqrt{n^4-2n^3}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n^4+3n^3} + \sqrt{n^4-2n^3}}{\sqrt{n^4+3n^3} + \sqrt{n^4-2n^3}} = \\ = \frac{(n^4+3n^3) - (n^4-2n^3)}{n\left(\sqrt{n^4+3n^3} + \sqrt{n^4-2n^3}\right)} = \\ = \frac{5n^3}{n^3\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)} \to \frac{5}{2}\,.$$

Secondo limite: Poiché $2e^{-x^3} \to 0$, si può sfruttare il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1\,,$$

ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{10}\ln(1+2e^{-x^3}) = \lim_{x\to+\infty} 2x^{10}e^{-x^3} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{e^{x^3}} = \left[\text{ponendo } x^3=t\right] = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{10/3}}{e^t} = 0\,,$$

dal momento che per $t\to+\infty$ l'esponenziale e^t va all'infinito più rapidamente di qualunque potenza del suo argomento.

Terzo limite: Non si può ragionare come prima perché $2e^{x^3}\to+\infty$. Tuttavia

$$\ln(1+2e^{x^3}) = \ln\left[e^{x^3}(2+e^{-x^3})\right] = = \ln e^{x^3} + \ln(2+e^{-x^3}) = x^3 + \ln(2+e^{-x^3})\,.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^{x^3})}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln(2+e^{-x^3})}{x^3}\right) = 1\,.$$

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = (\ln|2-x|-2)^2(2-x)\,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo.

Dominio: Occorre che $\log|x-2|$ sia definito. Quindi il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Anche se non era richiesto lo studio del segno, può essere utile la constatazione immediata che $f(x)$ si annulla solo per $|x-2|=e^2$, cioè per $x=2\pm e^2$, mentre negli altri punti è positiva per $x<2$, negativa per $x>2$.

Continuità e derivabilità: La funzione è continua nel suo dominio, in quanto ottenuta per rapporto/composizione di funzioni continue. Inoltre è anche derivabile nel suo dominio (il punto in cui si annulla il valore assoluto è escluso dal dominio).

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty\,,$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = 0\,.$$

Infatti per $t\to0$ si ha $t(\ln|t|)^n\to0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$; quindi

$$\lim_{x\to2}(\ln|2-x|-2)^2(2-x) = \lim_{t\to0}(\ln|t|-2)^2t = = \lim_{t\to0}\left[t(\ln|t|)^2 - 4t\,\ln|t| + 4t\right] = 0\,.$$

Ne segue che $x=2$ è un punto di "discontinuità eliminabile", cioè se si definisse $f(2)=0$ si otterrebbe una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.

Asintoti: Non ci sono asintoti orizzontali né verticali, e neanche obliqui, dal momento che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \mp\infty\,.$$

Derivata prima, crescenza e decrescenza: Ricordando che $D(\ln|t|)=\frac{1}{t}$, per $x\neq2$ si ottiene facilmente

$$f'(x) = -(\ln|2-x|-2)^2 + \frac{2\,(\ln|2-x|-2)}{x-2}\,(2-x) = = (2-\ln|2-x|)\,\ln|2-x|\,.$$

Quindi

- $f'(x)=0$ per $|2-x|=1$ e per $|2-x|=e^2$, cioè per $x=1$, $x=3$ e $x=2\pm e^2$;
- $f'(x)>0$ per $0<\ln|2-x|<2$, cioè per $x\in\left(2-e^2\,,\,1\right)\cup\left(3\,,\,2+e^2\right)$;
- $f'(x)<0$ per $x\in\left(-\infty\,,\,2-e^2\right)\cup(1\,,\,2)\cup(2\,,\,3)\cup\left(2+e^2\,,\,+\infty\right)$.

Ne segue che:

- f è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $\left[2-e^2\,,\,1\right]$, $\left[3\,,\,2+e^2\right]$;
- f è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $\left(-\infty\,,\,2-e^2\right]$, $[1\,,\,2)$, $(2\,,\,3]$, $\left[2+e^2\,,\,+\infty\right)$;
- i punti $x=2-e^2$ e $x=3$ sono punti di minimo relativo;
- i punti $x=1$ e $x=2+e^2$ sono punti di massimo relativo.

Infine si osservi che

$$\lim_{x\to2} f'(x) = -\infty\,,$$

quindi se si estendesse f ponendo $f(2)=0$ si otterrebbe un flesso a tangente verticale in $x=2$.

Derivata seconda, concavità e convessità: Si ha:

$$f''(x) = \frac{2\,(1-\ln|x-2|)}{x-2}\,.$$

Quindi

- $f''(x)=0$ per $x=2\pm e$;
- $f''(x)>0$ per $x\in(-\infty\,,\,2-e)\cup(2\,,\,2+e)$;
- $f''(x)<0$ per $x\in(2-e\,,\,2)\cup(2+e\,,\,+\infty)$.

Pertanto:

- f è convessa in ciascuno degli intervalli $(-\infty\,,\,2-e]$, $(2\,,\,2+e]$;
- f è concava in ciascuno degli intervalli $[2-e\,,\,2)$, $[2+e\,,\,+\infty)$;
- i punti $x=2\pm e$ sono punti di flesso.

Il grafico qualitativo di f è riportato in ultima pagina.
E' utile notare che lo studio avrebbe potuto essere notevolmente semplificato ponendo $x-2=t$ e studiando la funzione

$$g(t) = f(t+2) = -(\ln|t|-2)^2t\,,$$

che è una funzione dispari e può pertanto essere studiata solo per $t>0$. Il grafico di f si riottiene spostando di due unità verso destra il grafico di g.

---

5. Calcolare gli sviluppi di MacLaurin fino all'8^0 grado delle funzioni

$$f(x) = \ln(3 - 2e^{x^3})\,, \qquad g(x) = \frac{\ln(3 - 2e^{x^3})}{1 - 2\,\mathrm{sen}\, x^2}\,.$$

Prima funzione: Si ha

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0.$$

Quindi

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0,$$
$$3 - 2e^{x^3} = 1 - 2x^3 - x^6 + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0.$$

D'altra parte

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0;$$

utilizzando quest'ultima formula con $t = -2x^3 - x^6 + o(x^8) \to 0$, e ricordando le proprietà degli "o piccoli", otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\big(1 + (-2x^3 - x^6 + o(x^8))\big) = \\ &= \big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big) \underbrace{-\frac{1}{2}\big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big)^2}_{=-2x^6+o(x^8)} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{3}\big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big)^3}_{=o(x^8)} + \underbrace{o\Big(\big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big)^3\Big)}_{=o(x^8)} = \\ &= -2x^3 - 3x^6 + o(x^8)\,. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $P_8(x;f)$ di Mac Laurin di grado 8 è l'unico tra i polinomi $p(x)$ di grado ≤ 8 tale che

$$f(x) = p(x) + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0,$$

se ne deduce che

$$P_8(x;f) = -2x^3 - 3x^6\,.$$

Seconda funzione: Dobbiamo cercare lo sviluppo di MacLaurin di

$$h(x) = \frac{1}{1 - 2\,\mathrm{sen}\, x^2}$$

e moltiplicarlo per quello ottenuto per f. Poiché lo sviluppo di f inizia con un termine di grado 3, basterà sviluppare $h(x)$ fino all'ordine 5. Si ha:

$$\mathrm{sen}\, t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \qquad \text{per } t \to 0.$$

Quindi

$$2\,\mathrm{sen}\, x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^8) = x^2 + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$

e prendendo in quest'ultima formula $t = 2x^2 + o(x^5) \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{1 - \big(2x^2 + o(x^5)\big)} = \\ &= 1 + \big(2x^2 + o(x^5)\big) + \underbrace{\big(2x^2 + o(x^5)\big)^2}_{=4x^4+o(x^5)} + \\ &\qquad + \underbrace{\big(2x^2 + o(x^5)\big)^3}_{=o(x^5)} + \underbrace{o\Big(\big(2x^2 + o(x^5)\big)^3\Big)}_{=o(x^5)} = \\ &= 1 + 2x^2 + 4x^4 + o(x^5)\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)h(x) = \\ &= \Big(-2x^3 - 3x^6 + o(x^8)\Big) \cdot \Big(1 + 2x^2 + 4x^4 + o(x^5)\Big) = \\ &= -2x^3 - 4x^5 - 3x^6 - 8x^7 - 6x^8 + o(x^8)\,. \end{aligned}$$

Dunque il polinomio cercato è

$$P_8(x;g) = -2x^3 - 4x^5 - 3x^6 - 8x^7 - 6x^8\,.$$

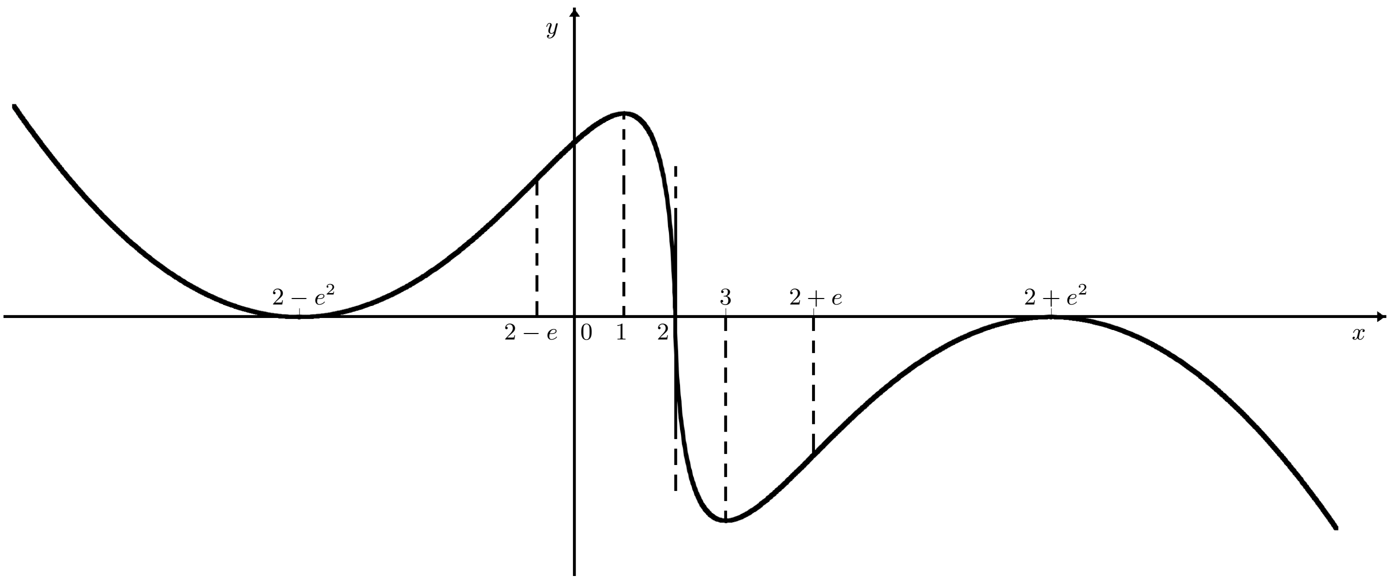


Fig. 1: Grafico di $f(x)$ (Esercizio n.4).

Cognome e nome ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile**. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\operatorname{tg}\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{2}{n}-\frac{\alpha}{n}\right)$$

($\alpha \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{\frac{3-x}{x}}\,\frac{dx}{1+x}\ .$$

(6 punti)

---

3. Trovare l'ordine dei seguenti infiniti, per $x \to 0^+$:

$$f(x)=\frac{\log(1+2x)}{1-\cos x^2}\,, \qquad g(x)=\frac{x+x^3}{\operatorname{tg}x^3+\operatorname{sen}^6 x}\,, \qquad h(x)=\frac{1}{e^{-x^2}-\cos x}\ .$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x)=e^{-x}(x+2)^{1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Data la funzione di due variabili $f(x,y)=x^3+(x+y)\,(y-3x)$, determinarne i punti critici e classificarli. Successivamente trovare massimo e minimo assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (20/9/2005)

Cognome e nome ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, testi o appunti, con l'eccezione dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile**. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right); \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right); \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

($\alpha \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,\frac{dx}{2x+1}\,.$$

(6 punti)

---

3. Trovare l'ordine dei seguenti infiniti, per $x \to 0^+$:

$$f(x)=\frac{x+x^4}{\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{sen}^2 x}\,, \qquad g(x)=\frac{1-\cos x}{\log(1+x^4)}\,, \qquad h(x)=\frac{1}{e^{x^2}-\sqrt{1+2x^2}}\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x)=e^{-x}(x-1)^{2/3}\,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Data la funzione di due variabili $f(x,y)=(x+y)\,(x-2y)+x^3$, determinarne i punti critici e classificarli. Successivamente trovare massimo e minimo assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(-4,0)$, $(0,2)$. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (16/12/2005)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 20–21 dicembre; ◯ 22–23 dicembre; ◯ 9–10 gennaio; ◯ 16–17 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale α, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2\alpha+5)^n}{5n^2-n+4}\,;\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(3+n^3)-3\ln n}{(n+2)^\alpha}\,.$$

(7 punti)

---

2. Calcolare l'integrale

$$\int_1^3 f(x)\,dx\ ,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita al successivo esercizio n. 4. Decidere inoltre se l'integrale

$$\int_2^{+\infty}\big(x-f(x)\big)\,dx\ ,$$

è convergente. *(8 punti)*

---

3. Ordinare i seguenti infiniti, per $x\to+\infty$:

$$f(x)=\ln(x+3e^x)\ ,\quad g(x)=\sqrt{x^3+5}\ ,$$

$$h(x)=x\,\ln(1+x^2)\ ,\quad k(x)=x^5\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt{3+|x^2-4|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali periodicità e simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni nei numeri complessi:

$$(\overline{z})^2-|z|^2+2\,\mathrm{Im}(z)=i-2\,,\qquad (z-i)^3=8i\,,$$

dove $\mathrm{Im}(z)$ indica la parte immaginaria di z. *(6 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (16/12/2005)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 20–21 dicembre; ◯ 22–23 dicembre; ◯ 9–10 gennaio; ◯ 16–17 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale α, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(3\alpha-2)^n}{2n^3-n+1}\,;\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(2+n^2)-2\ln n}{(n+3)^\alpha}\,.$$

(7 punti)

---

2. Calcolare l'integrale

$$\int_2^4 f(x)\,dx\ ,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita al successivo esercizio n. 4. Decidere inoltre se l'integrale

$$\int_3^{+\infty}\big(x-f(x)\big)\,dx\ ,$$

è convergente. *(8 punti)*

---

3. Ordinare i seguenti infiniti, per $x\to+\infty$:

$$f(x)=\sqrt{3+2x^3}\ ,\quad g(x)=x^5\left(\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)\ ,$$

$$h(x)=\ln(x+2e^x)\ ,\quad k(x)=\frac{x^2+1}{\ln(1+x)}\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt{8+|x^2-9|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali periodicità e simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni nei numeri complessi:

$$(\overline{z})^2+2\,\mathrm{Im}(z)=|z|^2+2i-1\,,\qquad (z+i)^3=-8i\,,$$

dove $\mathrm{Im}(z)$ indica la parte immaginaria di z. *(6 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (11/1/2006)

Cognome e nome ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 17–18 gennaio; ◯ 19–20 gennaio; ◯ 23–24 gennaio.
Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \frac{20x}{2x^2+3} \,,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi ed eventuali asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, utilizzando quando fatto per $f(x)$, disegnare schematicamente il grafico di

$$g(x) = \left| \ln \frac{20x}{2x^2+3} \right| .$$

(8 punti)

---

2. Calcolare gli integrali

$$\int_1^3 f(x)\,dx \;, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx \;,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita al precedente esercizio n. 1. *(7 punti)*

---

3. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = x^2 \ln x \;, \quad g(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x + x^6}{\sqrt{x}} \;,$$

$$h(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^2} \;, \quad k(x) = x + x^2 \ln x \,.$$

(7 punti)

---

4. Al variare del parametro x, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{x}{n} - \cos \frac{2}{n} \right) ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln x)^n (3^n + n) \,.$$

(7 punti)

---

5. Data la funzione

$$f(x,y) = 3\sqrt{x^2+y^2} - (1-x)^2 \;,$$

a) calcolarne i punti critici;
b) classificarli;
c) trovare il piano tangente al suo grafico nel punto $(1\,,\,1\,,\,3\sqrt{2})$;
d) calcolare, se esistono, le derivate parziali nell'origine. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (11/1/2006)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 17–18 gennaio; ◯ 19–20 gennaio; ◯ 23–24 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \frac{3x^2+1}{8x} ,$$

e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi ed eventuali asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, utilizzando quando fatto per $f(x)$, disegnare schematicamente il grafico di

$$g(x) = \left| \ln \frac{3x^2+1}{8x} \right| .$$

(8 punti)

---

2. Calcolare gli integrali

$$\int_1^2 f(x)\,dx , \qquad \int_0^1 f(x)\,dx ,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita al precedente esercizio n. 1. *(7 punti)*

---

3. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x} , \quad g(x) = \frac{x^2}{\ln x} + x ,$$

$$h(x) = \frac{\ln(1+x^2) - x^2 + x^6}{\sqrt{x}} , \quad k(x) = \sqrt[3]{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} .$$

(7 punti)

---

4. Al variare del parametro x, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{x}{n^2}} - \cos \frac{3}{n} \right) ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^n}{2^n + n + 1} .$$

(7 punti)

---

5. Data la funzione

$$f(x,y) = (1-y)^2 - 4\sqrt{x^2+y^2} ,$$

a) calcolarne i punti critici;
b) classificarli;
c) trovare il piano tangente al suo grafico nel punto $(1\,,\,1\,,\,-4\sqrt{2})$;
d) calcolare, se esistono, le derivate parziali nell'origine. *(7 punti)*

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \ln \frac{20x}{2x^2+3},$$
e in particolare: dominio, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi ed eventuali asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, utilizzando quando fatto per $f(x)$, disegnare schematicamente il grafico di
$$g(x) = \left| \ln \frac{20x}{2x^2+3} \right|.$$

Dominio: L'argomento del logaritmo deve essere positivo, quindi il dominio è la semiretta $(0, +\infty)$.

Continuità e derivabilità: La funzione è derivabile, quindi continua, nel suo dominio, in quanto ottenuta per rapporto/composizione di funzioni derivabili.

Segno: questo non era richiesto, ma è utile ai fini del grafico di $g(x)$ da fare successivamente. Si ha:
$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{20x}{2x^2+3} = 1 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 20x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{94}}{2};$$
Posto $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{94}}{2}$, $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{94}}{2}$, f risulta positiva in (x_1, x_2), negativa in $(0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Limiti:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty\ :$$
l'asse delle y è un asintoto verticale (destro) per f.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{20}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty\,. \qquad (1)$$

Asintoto obliquo: osservato che $\dfrac{20x}{2x^2+3} \sim \dfrac{10}{x}$ per $x \to +\infty$, si ha:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{20x}{2x^2+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{x} + \overbrace{\ln\frac{20}{2+\frac{3}{x}}}^{\to\ \ln 10}}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln x}{x} = 0^+$$
(in alternativa si può usare il teorema di De L'Hôpital). Questo, insieme a (1), mostra che f non ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Derivata prima, crescenza e decrescenza: E' più semplice scrivere la f nella forma
$$f(x) = \ln 20 + \ln x - \ln(2x^2+3)\,.$$
Si ha
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{2x^2+3} = \frac{3-2x^2}{x\,(2x^2+3)},$$
da cui

- $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,225$;
- $f'(x) > 0$ per $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$;
- $f'(x) < 0$ per $\sqrt{\frac{3}{2}} < x < +\infty$.

Ne segue che:

- f è strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$;
- f è strettamente decrescente in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$;
- il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di massimo assoluto.

Derivata seconda, concavità e convessità:
$$f''(x) = \frac{-4x\,(2x^3+3x) - (3-2x^2)\,(6x^2+3)}{(2x^3+3x)^2} = \frac{4x^4 - 24x^2 - 9}{(2x^3+3x)^2}\,.$$
Quindi

- $f''(x) = 0$ per $4x^4 - 24x^2 - 9 = 0$,
  cioè per $x = \sqrt{\dfrac{6+\sqrt{45}}{2}} \approx 2,521$;
- $f''(x) > 0$ per $x > \sqrt{\dfrac{6+\sqrt{45}}{2}}$;
- $f''(x) < 0$ per $0 < x < \sqrt{\dfrac{6+\sqrt{45}}{2}}$.

Pertanto, posto $x_3 = \sqrt{\dfrac{6+\sqrt{45}}{2}}$:

- f è convessa in $[x_3, +\infty)$;
- f è concava in $(0, x_3]$;
- il punto $x = x_3$ è un punto di flesso.

Il grafico qualitativo di f è riportato in ultima pagina.

Il grafico di $g(x) = |f(x)|$ è ottenuto "ribaltando" il grafico di $f(x)$ rispetto all'asse x nella zona dove f è negativa, e quindi ha la forma indicata nel grafico in ultima pagina.

---

2. Calcolare gli integrali
$$\int_1^3 f(x)\,dx\,, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx\,,$$
dove $f(x)$ è la funzione definita al precedente esercizio n. 1.

Calcoliamo prima l'integrale indefinito:
$$\int f(x)\,dx = \int \ln(20x)\,dx - \int \ln(2x^2+3)\,dx\,.$$

I due integrali si calcolano per parti:

$$\int \ln(20x)\,dx = x\,\ln(20x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\,\big(\ln(20x)-1\big)+c\,;$$

$$\begin{aligned}\int \ln(2x^2+3)\,dx &= x\,\ln(2x^2+3) - \int \frac{4x^2}{2x^2+3}\,dx\\ &= x\,\ln(2x^2+3) - \int \frac{(4x^2+6)-6}{2x^2+3}\,dx\\ &= x\,\ln(2x^2+3) - 2\int dx + 6\int \frac{dx}{2x^2+3}\\ &= x\,\ln(2x^2+3) - 2x + 2\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)^2+1}\\ &= x\,\ln(2x^2+3) - 2x + \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) + c\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int f(x)\,dx = x\,\ln\frac{20x}{2x^2+3} + x - \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) + c\,.$$

Il primo dei due integrali definiti vale pertanto:

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\,dx &= \left[x\,\ln\frac{20x}{2x^2+3} + x - \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)\right]_1^3\\ &= \ln\frac{2000}{343} + 2 + \sqrt{6}\left(\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \mathrm{arctg}\,\sqrt{6}\right).\end{aligned}$$

Il secondo integrale è improprio perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 f(x)\,dx\\ &= \ln 4 + 1 - \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) +\\ &\quad - \lim_{t\to 0^+}\left(t\,\ln\frac{20t}{2t^2+3} + t - \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,t\right)\right)\\ &= \ln 4 + 1 - \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che

$$t\,\ln\frac{20t}{2t^2+3} = -t\,\ln t + t\,\ln\frac{20}{2+\frac{3}{t}} \xrightarrow{t\to 0^+} 0\,.$$

---

3. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = x^2\ln x\,,\quad g(x) = \frac{x - \mathrm{sen}\,x + x^6}{\sqrt{x}}\,,$$

$$h(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}\,,\quad k(x) = x + x^2\ln x\,.$$

Analisi di $f(x)$: Tenuto conto che, per $x \to 0^+$, $\ln x$ tende a $-\infty$, ma più lentamente di qualunque potenza negativa di x, si ottiene che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a 2, ma di ordine superiore rispetto ad ogni numero minore di 2.

Analisi di $g(x)$: Osservato che

$$\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

e quindi che

$$x - \mathrm{sen}\,x + x^6 = \frac{x^3}{6} + o(x^4)\,,$$

si ottiene che

$$g(x) = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\sqrt{x}} \sim \frac{x^{5/2}}{6}\,,$$

quindi $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{5}{2}$.

Analisi di $h(x)$: Usando lo sviluppo

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t) \qquad \text{per } t \to 0\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}h(x) &= (1+x^2)^{1/2} - (1+x^2)^{1/3}\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \big(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\big) = \frac{x^2}{6} + o(x^2)\,,\end{aligned}$$

e quindi $h(x)$ è un infinitesimo di ordine 2.

Analisi di $k(x)$:

$$k(x) = x\,\big(1 + x\,\ln x\big)\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\ln x = 0\,,$$

ne segue che $k(x) \sim x$, quindi è un infinitesimo di ordine 1. Quindi le quattro funzioni sono così ordinate in ordine crescente:

$$k(x)\,,\quad f(x)\,,\quad h(x)\,,\quad g(x)\,.$$

---

4. Al variare del parametro x, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mathrm{ch}\,\frac{x}{n} - \cos\frac{2}{n}\right)\,;\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(\ln x)^n(3^n+n)\,.$$

Prima serie: La serie è a termini positivi. Per $x \neq 0$, sfruttando gli sviluppi di MacLaurin del coseno e del coseno iperbolico, si ha:

$$\mathrm{ch}\,\frac{x}{n} = 1 + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\,,\quad \text{per } n \to +\infty\,,$$

$$\cos\frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\,,\quad \text{per } n \to +\infty\,,$$

quindi

$$\operatorname{ch}\frac{x}{n} - \cos\frac{2}{n} = \frac{x^2+2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{x^2+2}{n^2}.$$

Pertanto si può confrontare la serie con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, che converge.
Per $x = 0$, si ha

$$\operatorname{ch}\frac{x}{n} - \cos\frac{2}{n} = 1 - \cos\frac{2}{n} = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{2}{n^2},$$

e la serie converge.
In definitiva la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Seconda serie: La serie è definita solo per $x > 0$. Posto $y = \ln x$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n(3^n + n), \tag{2}$$

che è una serie di potenze. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+n} = \lim_{n\to+\infty} 3\sqrt[n]{1+\frac{n}{3^n}} = 3,$$

la serie (2) ha raggio di convergenza $\frac{1}{3}$, quindi converge per $-\frac{1}{3} < y < \frac{1}{3}$, non converge per $y < -\frac{1}{3}$ e per $y > \frac{1}{3}$. Per $y = \pm\frac{1}{3}$, il termine della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge.
In definitiva la serie converge se e solo se $-\frac{1}{3} < \ln x < \frac{1}{3}$, cioè $e^{-1/3} < x < e^{1/3}$.

---

5. Data la funzione

$$f(x,y) = 3\sqrt{x^2+y^2} - (1-x)^2,$$

a) calcolarne i punti critici;
b) classificarli;
c) trovare il piano tangente al suo grafico nel punto $(1\,,\,1\,,\,3\sqrt{2})$;
d) calcolare, se esistono, le derivate parziali nell'origine.

---

a) Per $(x,y) \neq (0,0)$ (l'origine verrà studiata nel punto *d)*) si ha

$$f_x(x,y) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2(x-1),$$

$$f_y(x,y) = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{|x|} - 2(x-1) = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Distinguendo i casi $x < 0$ e $x > 0$ si trovano i punti critici $P_1\left(-\frac{1}{2}\,,\,0\right)$ e $P_2\left(\frac{5}{2}\,,\,0\right)$.

b) Calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2 = \frac{3y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2,$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Nei punti critici il determinante Hessiano vale

$$\det H\left(-\frac{1}{2}\,,\,0\right) = \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = -12 < 0;$$

$$\det H\left(\frac{5}{2}\,,\,0\right) = \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} = -\frac{12}{5} < 0.$$

Quindi entrambi i punti critici sono punti di sella.

c) Il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 3\sqrt{2})$ ha equazione

$$\begin{aligned} z &= 3\sqrt{2} + f_x(1,1)\,(x-1) + f_y(1,1)\,(y-1) \\ &= 3\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,(x-1) + \frac{3}{\sqrt{2}}\,(y-1) = \frac{3}{\sqrt{2}}\,(x+y). \end{aligned}$$

d) Analizziamo le derivate parziali nell'origine:

$$f_x(0,0) = \varphi'(0),$$

dove

$$\varphi(x) = f(x,0) = 3|x| - (1-x)^2 = \begin{cases} -x^2 + 5x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

E' chiaro che $\varphi'(0)$ non esiste, poiché $x = 0$ è un punto angoloso per φ (le sue derivate destra e sinistra nell'origine valgono rispettivamente 5 e -1), quindi $f_x(0,0)$ non esiste. Alla stessa conclusione si arriverebbe calcolando il limite del rapporto incrementale

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}.$$

Analogamente si prova che non esiste la derivata parziale $f_y(0,0)$.

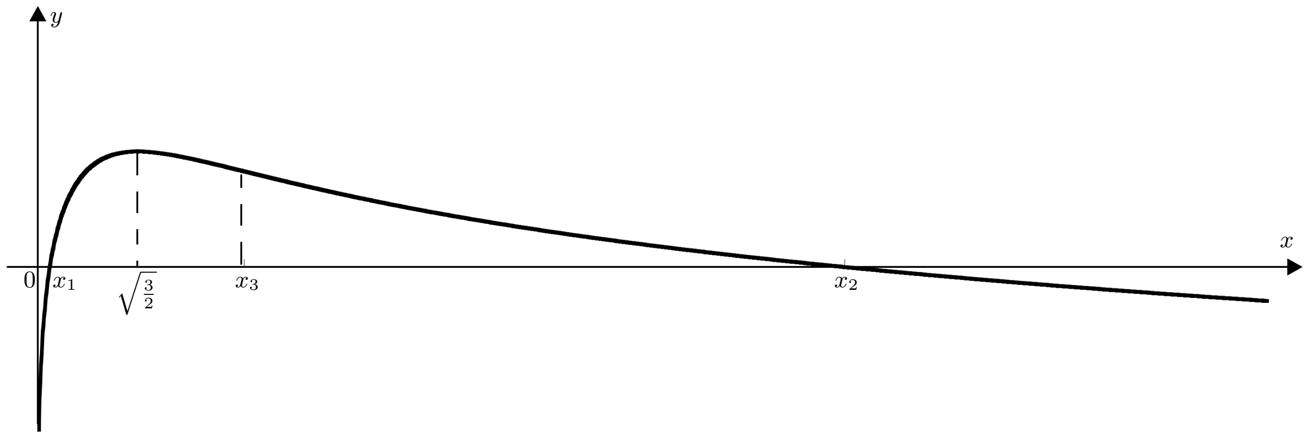


Fig. 1: Grafico di $f(x)$ (Esercizio n.1).

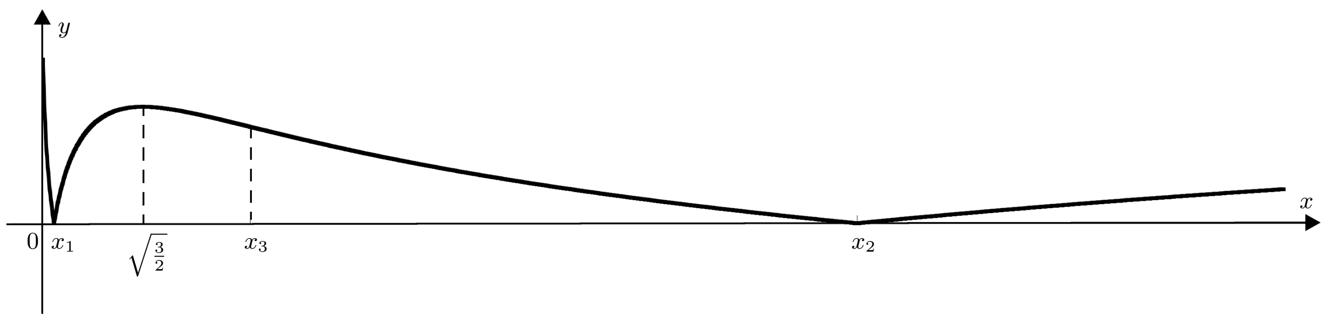


Fig. 2: Grafico di $g(x)$ (Esercizio n.1).

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (25/3/2006)

Cognome e nome ....
Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \operatorname{sh}^3 x - 18\,|\operatorname{sh} x|\,,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi ed eventuali asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale improprio
$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x-2)^6} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\right)^{\alpha} dx\ ,$$
e successivamente calcolarlo per $\alpha = 0$. *(7 punti)*

---

3. Scrivere i numeri complessi
$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11}\ , \qquad w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11} \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^6$$
sia in forma trigonometrica che nella forma $a + ib$. Successivamente scrivere le radici seste di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso. *(6 punti)*

---

4. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare la convergenza delle due serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)^n}{3n^2 - 3\sqrt{n} + 2}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\alpha}{2n^3+n^{\alpha}}\,.$$
(8 punti)

---

5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:
$$a_n = \frac{\pi n}{2n+5}\,, \qquad b_n = \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2n+5}\,, \qquad c_n = (-1)^n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2n+5}\,.$$
(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (25/3/2006)

Cognome e nome ....

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = |\operatorname{sh} x|^3 + 24 \operatorname{sh} x \,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi ed eventuali asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x-3)^6} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)^{\alpha} dx \,,$$

e successivamente calcolarlo per $\alpha = 0$. *(7 punti)*

---

3. Scrivere i numeri complessi

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{13} , \qquad w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{13} \left(1 - i\sqrt{3} \right)^5$$

sia in forma trigonometrica che nella forma $a + ib$. Successivamente scrivere le radici quinte di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso. *(6 punti)*

---

4. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2 \operatorname{sen} \alpha)^n}{4n^2 + 3\log n - 1} \,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n + \alpha}{n^2 + n^{\alpha}} \,.$$

(8 punti)

---

5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{\pi n}{2n+1} \,, \qquad b_n = \cos \frac{\pi n}{2n+1} \,, \qquad c_n = (-1)^n \cos \frac{\pi n}{2n+5} \,.$$

(7 punti)

Cognome e nome ....
Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x + \sqrt{3}|}{|\operatorname{tg} x| - 1},$$

dire quante sono le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \lambda$$

in ogni periodo della funzione, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$. *(8 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge ciascuno degli integrali impropri

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-2)^\alpha}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} x}{|x-2|^\alpha}\, dx,$$

e calcolare il primo per $\alpha = 2$. *(8 punti)*

---

3. Data la funzione

$$f(x, y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2),$$

calcolarne i punti critici e classificarli. Successivamente calcolarne gli estremi assoluti nel triangolo (chiuso) di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. *(7 punti)*

---

4. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\alpha n}}{5n^2 + 2n^{3/2} + 1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \operatorname{arctg} n}{5n^2 + 2n^\alpha + 1}.$$

(7 punti)

---

5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{1}{3n^2 + 5}, \qquad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}, \qquad c_n = 2^{(-1)^n a_n}.$$

(6 punti)

Cognome e nome ....

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x - 1|}{|\operatorname{tg} x| - \sqrt{3}},$$

dire quante sono le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \lambda$$

in ogni periodo della funzione, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$. *(8 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge ciascuno degli integrali impropri

$$\int_4^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-3)^\alpha}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \int_2^4 \frac{\operatorname{arctg} x}{|x-3|^\alpha}\, dx,$$

e calcolare il primo per $\alpha = 2$. *(8 punti)*

---

3. Data la funzione

$$f(x,y) = e^{-x-3y}(x^2 - y^2),$$

calcolarne i punti critici e classificarli. Successivamente calcolarne gli estremi assoluti nel triangolo (chiuso) di vertici $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$. *(7 punti)*

---

4. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare la convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{3n^2 + 5n^{1/2} + 1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \log n}{3n^2 + 5n^\alpha + 1}.$$

(7 punti)

---

5. Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{1}{2n^2+3}, \qquad b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n}, \qquad c_n = 3^{(-1)^n a_n}.$$

(6 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (18/12/2006)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 21 dicembre; ◯ 22 dicembre; ◯ 9–10 gennaio; ◯ 15–16 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale x, studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3^n + n^3)\,(2 - \ln x)^n}{n^5}$;

studiare inoltre la convergenza assoluta e quella semplice della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2 + 4\ln n}$.

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 2}\right)^\alpha dx \,.$$

Calcolare inoltre

$$\int \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 2}\, dx \,.$$

(7 punti)

---

3. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = x^2 + x^3 \ln x \,, \quad g(x) = \sqrt{9 - x^3} - 3 \,,$$

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x}} \,, \quad k(x) = \frac{2 - e^{x^2} - \cos(\sqrt{2}\,x)}{x^{3/2}} \,.$$

(8 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\frac{3}{4} - x^2\right| - \sqrt{2x^2 - 1}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Scrivere i numeri complessi

$$z = \left(\sqrt{3} + i\right)^4 \,, \qquad w = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)^4}{(-1 - i)^6}$$

sia in forma trigonometrica che nella forma $a + ib$. Successivamente scrivere le radici quinte di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso. *(6 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (18/12/2006)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 21 dicembre; ◯ 22 dicembre; ◯ 9–10 gennaio; ◯ 15–16 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale x, studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^n+5n^2)\,(1+2\ln x)^n}{n^4}$;

studiare inoltre la convergenza assoluta e quella semplice della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{3n}{\ln n + 2n^2}$.

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-3}\right)^{\alpha} dx \ .$$

Calcolare inoltre

$$\int \operatorname{arctg} \frac{x^2-3}{x}\, dx \ .$$

(7 punti)

---

3. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt[3]{x}} \ , \quad g(x) = x^3 - x^4 \ln x \ ,$$

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^{3/2}} \ , \quad k(x) = \sqrt{4+2x^2} - 2 \, .$$

(8 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{3x^2-2} - \left|1-x^2\right| \ ,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Scrivere i numeri complessi

$$z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 \ , \qquad w = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}{(-1-i)^6}$$

sia in forma trigonometrica che nella forma $a+ib$. Successivamente scrivere le radici terze di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso. *(6 punti)*

Cognome e nome ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 12–13 gennaio; ◯ 15–17 gennaio.
Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale α, trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f_\alpha(x) = \ln(1 - \alpha\, x \operatorname{sen} x) - e^{-x^2} + 1\,;$$

dire inoltre per quali α converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n + 5\ln^2 n)\, f_\alpha(1/n)$. *(7 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{(x^\alpha + \alpha)^2}\, dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$. *(8 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 y - 2y^2 + 3x^2 y\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos(\sqrt{|x|} - 1)\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Data la funzione

$$f(x) = -2x^3 + \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma\,,$$

trovare tutti i valori di α, β, γ (se esistono) che rendono vera (separatamente) ciascuna delle seguenti proprietà a), b), c), d),

a) f ammette un punto di minimo relativo per $x = 2$ e un punto di flesso per $x = 6$;
b) f ammette un punto di massimo relativo per $x = 2$ e un punto di flesso per $x = 6$;
c) f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$;
d) f è strettamente decrescente nel suo dominio.
(7 punti)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 12–13 gennaio; ◯ 15–17 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro reale α, trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f_\alpha(x) = \ln(1 + \mathrm{tg}\, x^2) + \alpha\,(1 - \cos(2x))\,;$$

dire inoltre per quali α converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(3n - 4\ln^2 n)\, f_\alpha(1/n)$. *(7 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(x+1)}{(x+\alpha)^\alpha}\, dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha = 2$. *(8 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2xy^3 - xy^2 + 3x^2\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \mathrm{arcsen}(1 - \sqrt{|x|})\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Data la funzione

$$f(x) = 3x^3 + \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma\,,$$

trovare tutti i valori di α, β, γ (se esistono) che rendono vera (separatamente) ciascuna delle seguenti proprietà a), b), c), d),

a) f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$;

b) f ammette un punto di massimo relativo per $x = 1$ e un punto di flesso per $x = 5$;

c) f ammette un punto di minimo relativo per $x = 1$ e un punto di flesso per $x = 5$;

d) f è strettamente crescente nel suo dominio.

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (4/2/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 13 aprile; ◯ 17 aprile.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+2)\,e^n}{e^{2n}+\ln n}\,,$$

e, al variare di $x \in \mathbf{R}$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-4)^n}{(2e)^n+3}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (\ln(e^x+2)-x)\,dx\ .$$

Calcolare inoltre l'integrale indefinito

$$\int e^{2x}\ \ln(e^{2x}-2e^x+2)\,dx\,.$$

(8 punti)

---

3. Dato il numero complesso $z = 2-2i$, determinare: a) z^3; b) z^{13}; c) $\dfrac{1}{z^3}$;

d) le radici cubiche di z^3 (in forma trigonometrica); e) $z^3\,\overline{z}^3$ (commentare: perché viene fuori un numero reale positivo?).

(5 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln|3e^x-2| - |x|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare gli estremi superiore e inferiore di ciascuno degli insiemi numerici

$$E = \Big\{ \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3}\ :\ n \in \mathbf{N} \Big\}\,, \qquad F = \Big\{ 3n + \frac{2}{m}\ :\ n,m \in \mathbf{N} \Big\}$$

(ove si intende $\mathbf{N} = \{1,2,\ldots\}$). *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (4/2/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 13 aprile; ◯ 17 aprile.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5n^2+1)\, e^n}{n+e^{3n}}\,,$$

e, al variare di $x \in \mathbf{R}$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(9-x^2)^n}{1+(3e)^n}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (\ln(e^x+5)-x)\, dx\ .$$

Calcolare inoltre l'integrale indefinito

$$\int e^{2x}\ \ln(e^{2x}+4e^x+5)\, dx\,.$$

(8 punti)

---

3. Dato il numero complesso $z = 1 - i\sqrt{3}$, determinare: a) z^4; b) z^{14}; c) $\dfrac{1}{z^4}$;
d) le radici quarte di z^4 (in forma trigonometrica); e) $z^4\,\overline{z}^4$ (commentare: perché viene fuori un numero reale positivo?).
(5 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = |x| - \ln|2e^x - 3|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare gli estremi superiore e inferiore di ciascuno degli insiemi numerici

$$E = \Big\{ \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4}\ :\ n \in \mathbf{N} \Big\}\,, \qquad F = \Big\{ 2n + \frac{3}{m}\ :\ n, m \in \mathbf{N} \Big\}$$

(ove si intende $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$). *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (4/2/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 13 aprile; ◯ 17 aprile.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+2)\, e^n}{e^{2n} + \ln n}\,,$$

e, al variare di $x \in \mathbf{R}$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-4)^n}{(2e)^n + 3}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (\ln(e^x+2) - x)\, dx\ .$$

Calcolare inoltre l'integrale indefinito

$$\int e^{2x}\, \ln(e^{2x} - 2e^x + 2)\, dx\,.$$

(8 punti)

---

3. Dato il numero complesso $z = 2 - 2i$, determinare: a) z^3; b) z^{13}; c) $\dfrac{1}{z^3}$;
d) le radici cubiche di z^3 (in forma trigonometrica); e) $z^3\,\overline{z}^3$ (commentare: perché viene fuori un numero reale positivo?).
(5 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln|3e^x - 2| - |x|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare gli estremi superiore e inferiore di ciascuno degli insiemi numerici

$$E = \Big\{ \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3}\ :\ n \in \mathbf{N} \Big\}\,, \qquad F = \Big\{ 3n + \frac{2}{m}\ :\ n, m \in \mathbf{N} \Big\}$$

(ove si intende $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$). *(7 punti)*

1. Prima serie.

Si tratta di una serie a termini positivi. Applicando il criterio della radice, si ottiene

$$\sqrt[n]{\frac{(3n+2)e^n}{e^{2n}+\ln n}} = \frac{\sqrt[n]{3n+2}\ \ e}{\sqrt[n]{e^{2n}+\ln n}}$$

D'altra parte $\sqrt[n]{3n+2}$ tende a 1, perché è la radice n-esima di un polinomio. In alternativa, si può ragionare così:

$$\sqrt[n]{3n+2} = e^{\frac{1}{n}\ln(3n+2)} \longrightarrow e^0 = 1,$$

in quanto

$$\frac{\ln(3n+2)}{n} = \underbrace{\frac{\ln(3n+2)}{3n+2}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\frac{3n+2}{n}}_{\downarrow\, 3} \longrightarrow 0.$$

Inoltre $\sqrt[n]{e^{2n}+\ln n} = e^2\sqrt[n]{1+\frac{\ln n}{e^{2n}}} \longrightarrow e^2$,

in quanto (ad esempio) $\frac{\ln n}{e^{2n}} \to 0^+$, quindi definitivamente

$$1 < \sqrt[n]{1+\frac{\ln n}{e^{2n}}} < \sqrt[n]{2} \longrightarrow 1$$

Pertanto

$$\sqrt[n]{\frac{(3n+2)e^n}{e^{2n}+\ln n}} \longrightarrow \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} < 1.$$

Per il criterio della radice la serie converge.

Seconda serie

Con la sostituzione $x^2-4=y$, si ottiene la serie di potenze

$$\sum_n \frac{y^n}{(2e)^n+3}$$

Calcoliamone il raggio di convergenza, con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(2e)^n+3}} = \frac{1}{2e\sqrt[n]{1+\frac{3}{(2e)^n}}} \longrightarrow \frac{1}{2e}$$

(si mostra come sopra che $\sqrt[n]{1+\frac{3}{(2e)^n}} \to 1$).

Quindi il raggio di convergenza vale $2e$. La serie converge per $|y|<2e$, non converge per $|y|>2e$.

Per $y=2e$, si ha $\frac{(2e)^n}{(2e)^n+3} \to 1$, quindi la serie non può convergere.

Per $y=-2e$, il termine generico della serie vale $(-1)^n \frac{(2e)^n}{(2e)^n+3}$, che in valore assoluto tende a 1, quindi non può convergere a zero $\Rightarrow$ la serie non converge.

In definitiva, la serie converge se e solo se $|y|<2e$, cioè se e solo se

$$-2e < x^2-4 < 2e$$

cioè

$$4-2e < x^2 < 4+2e$$

sempre vera — vera se e solo se

$$-\sqrt{4+2e} < x < \sqrt{4+2e}.$$

La serie converge se e solo se

$$-\sqrt{4+2e} < x < \sqrt{4+2e}$$

Integrale improprio

2 La funzione integranda è continua in $[0,+\infty)$, quindi deve essere solo analizzata la convergenza dell'integrale per $x \to +\infty$.

D'altra parte, per $x \to +\infty$,

$$\ln(e^x+2) - x = \ln \frac{e^x+2}{e^x} = \ln\left(1+\frac{2}{e^x}\right) \sim \frac{2}{e^x}$$

visto che $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$.

Poiché $\int^{+\infty} \frac{dx}{e^x}$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche l'integrale dato.

Integrale indefinito

Con la sostituzione $e^x = t$, $e^x dx = dt$, si ottiene

$$\int e^{2x} \ln(e^{2x} - 2e^x + 2)\, dx = \int t \ln(t^2 - 2t + 2)\, dt =$$

[per parti]

$$= \frac{t^2}{2} \ln(t^2 - 2t + 2) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2 (2t-2)}{t^2 - 2t + 2}\, dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} \ln(t^2 - 2t + 2) - \int \frac{t^3 - t^2}{t^2 - 2t + 2}\, dt.$$

D'altra parte

$$\frac{t^3 - t^2}{t^2 - 2t + 2} = t + 1 - \frac{2}{t^2 - 2t + 2} = t + 1 - \frac{2}{(t-1)^2 + 1}$$

e quindi

$$\int \frac{t^3 - t^2}{t^2 - 2t + 2}\, dt = \frac{t^2}{2} + t - 2 \operatorname{arctg}(t-1) + c.$$

In definitiva l'integrale di partenza vale

$$\frac{e^{2x}}{2} \left(\ln(e^{2x} - 2e^x + 2) - 1\right) - e^x + 2 \operatorname{arctg}(e^x - 1) + c$$

(3) $z = 2-2i = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

a) $z^3 = (2\sqrt{2})^3 e^{-\frac{3}{4}\pi i} = 16\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -16-16i$

b) $z^{13} = (2\sqrt{2})^{13} e^{-\frac{13}{4}\pi i} = 524288\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i} =$

$= -524288 + 524288 i$

c) $\frac{1}{z^3} = \frac{1}{-16-16i} = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = -\frac{1}{16}\,\frac{1-i}{2} =$

$= -\frac{1}{32} + \frac{i}{32}$

d) Le tre radici cubiche di z^3 valgono:

$$z_k = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} i} \qquad k = 0, 1, 2,$$

quindi

$z_0 = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} = z = 2-2i$

$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{5}{12}\pi i}$

$z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{13}{12}\pi i}$

e) Infine, ricordando che $z\bar{z} = z^2$, si ha

$z^3\bar{z}^3 = (z\bar{z})^3 = |z|^6 = (2\sqrt{2})^6 = 2^9 = 512.$

④ $f(x) = \ln|3e^x - 2| - |x|$

<u>Dominio</u>: $\mathbb{R} \setminus \{\ln \frac{2}{3}\}$

La funzione è continua nel suo dominio, in quanto ottenuta per composizione e somma di funzioni continue.
Non presenta particolari simmetrie.

<u>Limiti</u>:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(3e^x-2)-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{3e^x-2}{e^x}}_{\to 3}\right) =$$

$$= \ln 3$$

La retta $y = \ln 3$ è <u>asintoto orizzontale</u> per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{\ln(2-3e^x)}_{\to \ln 2} + \underbrace{x}_{\to -\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \ln\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x\to \ln\frac{2}{3}} \left(\underbrace{\ln|3e^x-2|}_{\to -\infty} - \underbrace{|x|}_{\to \ln\frac{3}{2}}\right) = -\infty$$

La retta $x = \ln \frac{2}{3}$ è <u>asintoto verticale</u>.

Anche senza fare conti, segue subito che la retta

$y = x + \ln 2$ è <u>asintoto obliquo</u> per $x \to -\infty$.

Derivata prima

La funzione è sicuramente derivabile per $x \neq 0$; poiché

$$f(x) = \begin{cases} \ln|3e^x - 2| - x & \text{per } x \geq 0 \\ \ln|3e^x - 2| + x & \text{per } x < 0,\ x \neq \ln\frac{2}{3}. \end{cases}$$

tenuto conto che $D(\ln|t|) = \frac{1}{t}$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3e^x}{3e^x-2} - 1 = \dfrac{2}{3e^x-2} & \text{per } x > 0 \\[2ex] \dfrac{3e^x}{3e^x-2} + 1 = \dfrac{6e^x-2}{3e^x-2} & \text{per } x<0,\ x \neq \ln\frac{2}{3} \end{cases}$$

Per $x=0$, calcolo separatamente la derivata destra e quella sinistra:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 4$$

$x=0$ è p.to angoloso.

Lo studio del segno (svolto separatamente per $x>0$ e $x<0$) fornisce:

$f'(x) = 0$ per $x = \ln \frac{1}{3}$

$f'(x) > 0$ per $x \in \left(-\infty, +\ln \frac{1}{3}\right) \cup \left(\ln \frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0$ per $x \in \left(\ln \frac{1}{3}, \ln \frac{2}{3}\right)$

f è <u>strettamente crescente</u> in $\left(-\infty, \ln \frac{1}{3}\right]$ e in $\left(\ln \frac{2}{3}, +\infty\right)$

(N.B: ma non nella unione dei due intervalli!)

f è <u>strettamente decrescente</u> in $\left[\ln \frac{1}{3}, \ln \frac{2}{3}\right)$

Il punto $x = \ln \frac{1}{3}$ è di <u>massimo relativo</u>.

$$f\left(\ln \frac{1}{3}\right) = \ln \frac{1}{3}.$$

<u>Derivata seconda</u>:

Per $x \neq 0$, $x \neq \ln \frac{2}{3}$, si ha:

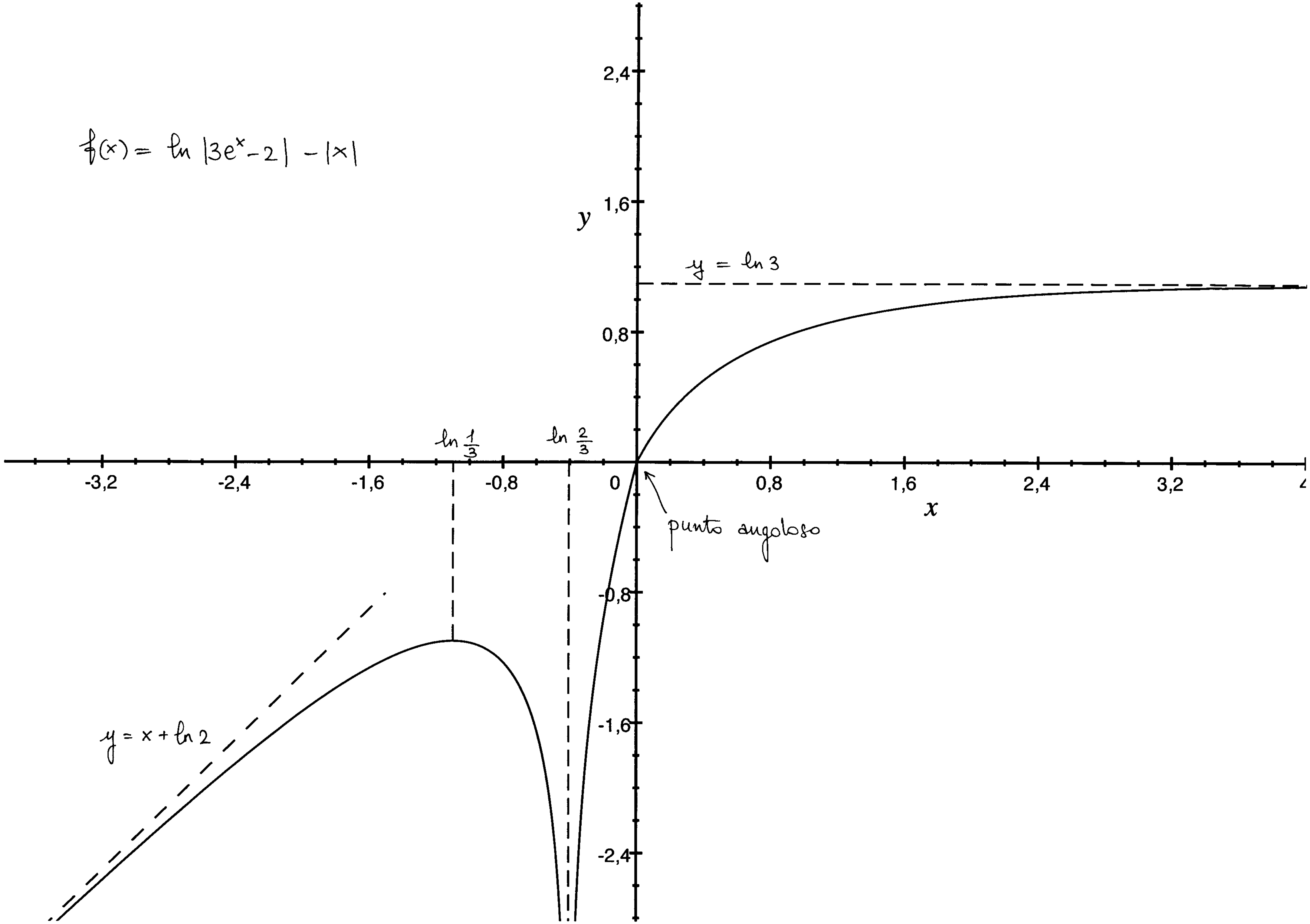
$$f''(x) = -\frac{6e^x}{(3e^x - 2)^2}$$

Quindi $f''(x) < 0 \quad \forall x \notin \left\{0, \ln \frac{2}{3}\right\}$

Tenuto conto del comportamento in $x = 0$,

f risulta concava in $\left(-\infty, \ln \frac{2}{3}\right)$ e in $\left(\ln \frac{2}{3}, +\infty\right)$

(N.B: ma non nella unione di questi due intervalli!).


$f(x) = \ln|3e^x - 2| - |x|$
$y = \ln 3$
$y = x + \ln 2$
$\ln\frac{1}{3}$
$\ln\frac{2}{3}$
punto angoloso
x
y
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4

⑤ Prima parte:

la successione $a_n = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3}$ è strettamente crescente,

dal momento che $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3} = 2 - \dfrac{6}{\sqrt{n}+3}$.

In alternativa, dal calcolo diretto si ottiene

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3} < \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+3} \iff$$

$$\iff \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+3\right) < \left(\sqrt{n}+3\right)\sqrt{n+1}$$

$$\iff 3\sqrt{n} < 3\sqrt{n+1} \qquad (\text{vera } \forall n \in \mathbb{N}).$$

Quindi

$$\sup E = \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$$

$$\inf E = \min E = a_1 = \frac{1}{2}$$

Seconda parte:

F è illimitato superiormente, essendo $3n + \frac{2}{m} > 3n$;
quindi, comunque si fissi $M>0$, se scegliamo $n > \frac{M}{3}$ e
m qualunque, si ha

$$3n + \frac{2}{m} > M$$

Quindi $\sup F = +\infty$.

D'altra parte si intuisce che, per rendere piccolo un elemento di F, conviene prendere n piccolo (l'ideale è n = 1) e m molto grande. In tal modo si ottengono i valori

$$3 \cdot 1 + \frac{2}{m} = 3 + \frac{2}{m},$$

che per m grande sono poco più grandi di 3.

Verifichiamo che $\inf F = 3$.

1) $3n + \frac{2}{m} \overset{?}{\geq} 3 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Ovvio perché $3n + \frac{2}{m} > 3n \geq 3$.

2) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n, m \in \mathbb{N}$ t.c. $3n + \frac{2}{m} < 3 + \varepsilon$?

Sì, basta prendere $n = 1$ e $\frac{2}{m} < \varepsilon$, cioè $m > \frac{2}{\varepsilon}$.

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (4/2/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 13 aprile; ◯ 17 aprile.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5n^2+1)\,e^n}{n+e^{3n}}\,,$$

e, al variare di $x \in \mathbf{R}$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(9-x^2)^n}{1+(3e)^n}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (\ln(e^x+5)-x)\,dx\ .$$

Calcolare inoltre l'integrale indefinito

$$\int e^{2x}\ \ln(e^{2x}+4e^x+5)\,dx\,.$$

(8 punti)

---

3. Dato il numero complesso $z = 1 - i\sqrt{3}$, determinare: a) z^4; b) z^{14}; c) $\dfrac{1}{z^4}$;

d) le radici quarte di z^4 (in forma trigonometrica); e) $z^4\,\overline{z}^4$ (commentare: perché viene fuori un numero reale positivo?).

(5 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = |x| - \ln|2e^x - 3|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Calcolare gli estremi superiore e inferiore di ciascuno degli insiemi numerici

$$E = \Big\{\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4}\ :\ n \in \mathbf{N}\Big\}\,, \qquad F = \Big\{2n + \frac{3}{m}\ :\ n, m \in \mathbf{N}\Big\}$$

(ove si intende $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$). *(7 punti)*

Risultati del 2° compito (✧):

1a) La serie converge

1b) La serie converge se e solo se

$$x \in \left(-\sqrt{9+3e}, -\sqrt{9-3e}\right) \cup \left(\sqrt{9-3e}, \sqrt{9+3e}\right)$$

2a) L'integrale improprio converge.

2b) L'integrale indefinito vale

$$\frac{e^{2x}-3}{2} \ln\left(e^{2x}+4e^x+5\right) - \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x - 4 \operatorname{arctg}\left(e^x+2\right) + c$$

3a) $z^4 = 16\, e^{\frac{2}{3}\pi i} = -8 + 8\sqrt{3}\, i$

3b) $z^{14} = 16384\, e^{\frac{4}{3}\pi i} = -8192 - i\, 8192\sqrt{3}$

3c) $\dfrac{1}{z^4} = -\dfrac{1}{32} - \dfrac{\sqrt{3}}{32}\, i$

3d) Le radici quarte di z^4 sono:

$z_0 = 2\, e^{\frac{\pi}{6} i} = \sqrt{3} + i$

$z_1 = 2\, e^{\frac{2\pi}{3} i} = -1 + \sqrt{3}\, i$

$z_2 = 2\, e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i$

$z_3 = 2\, e^{\frac{5}{3}\pi i} = z = 1 - i\sqrt{3}$

3e) $z^4\, \bar{z}^4 = |z|^8 = 256$

4)

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\ln \frac{3}{2}\}$

f continua nel suo dominio.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to \ln \frac{3}{2}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Asintoto obliquo per $x \to -\infty$: $y = -x - \ln 3$

$f'(x) = \operatorname{sign} x - \dfrac{2e^x}{2e^x-3}$ $\left(x \neq 0, x \neq \ln \frac{3}{2}\right)$

$x=0$ è un punto angoloso $\left(f'_-(0) = 1 , f'_+(0) = 3 \right)$.

f strettamente decrescente in $\left(-\infty, \ln \frac{3}{4}\right]$ e in $\left(\ln \frac{3}{2}, +\infty\right)$.

f strettamente crescente in $\left[\ln \frac{3}{4}, \ln \frac{3}{2}\right)$.

$x = \ln \frac{3}{4}$ è punto di minimo relativo.

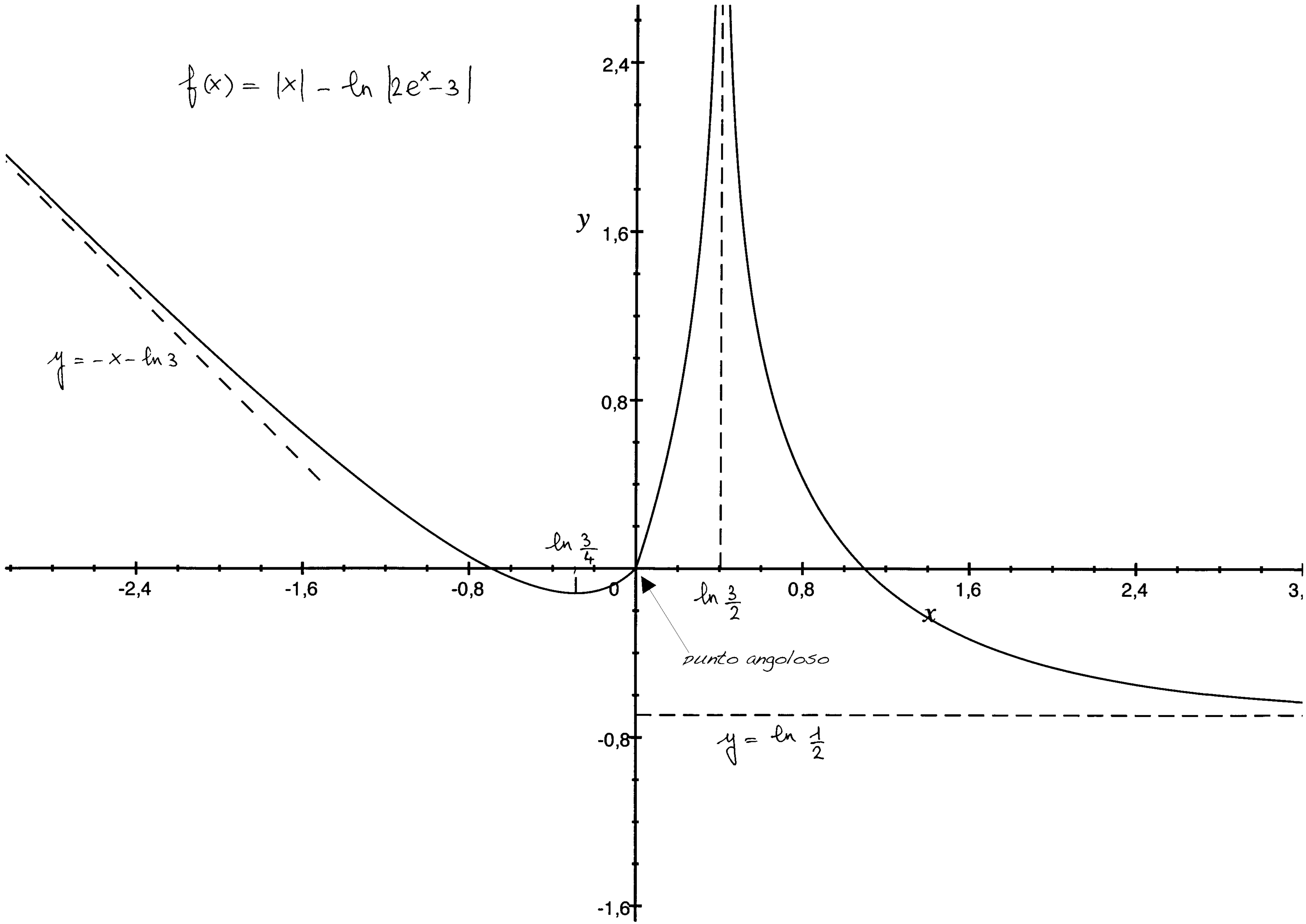
$f\left(\ln \frac{3}{4}\right) = \ln \frac{8}{9}$

$f''(x) = \dfrac{6e^x}{(2e^x-3)^2}$, $x \neq 0$, $x \neq \ln \frac{3}{2}$

f convessa in $\left(-\infty, \ln \frac{3}{2}\right)$ e in $\left(\ln \frac{3}{2}, +\infty\right)$.

5) $\sup E = 3$, $\inf E = \min E = \frac{3}{5}$

$\sup F = +\infty$, $\inf F = 2$



$f(x) = |x| - \ln|2e^x - 3|$
$y = -x - \ln 3$
$\ln \frac{3}{4}$
$\ln \frac{3}{2}$
punto angoloso
$y = \ln \frac{1}{2}$
y
x
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (17/7/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 24 luglio; ◯ 26–27 luglio; ◯ 30–31 luglio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\operatorname{tg} \frac{n}{n^2+6} - \frac{n}{n^2+6} \Big)^{\alpha}$$

(al variare di $\alpha > 0$). *(8 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \geq 9$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+\alpha)\,(x+1)},$$

e calcolarlo per $\alpha = 13$. *(8 punti)*

---

3. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{\operatorname{tg} x^3 + 4 \operatorname{sen} x + x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x-x^2)}{1-e^{-x^2}-x^2}.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{|27-x^3|} - 2,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Data la funzione

$$f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1,$$

determinarne i punti critici e classificarli. Dire inoltre se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2$. *(5 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale   PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (17/7/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 24 luglio;   ◯ 26–27 luglio;   ◯ 30–31 luglio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1} - \frac{n}{n^2+1} \right)^{\alpha}$$

(al variare di $\alpha > 0$). *(8 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \geq 16$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-8x+\alpha)\,(x+2)}\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 25$. *(8 punti)*

---

3. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{\operatorname{sen} x^2 - 3\operatorname{sen} x - x^2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+x^2) - \operatorname{sen} x}{2 - x^2 - 2\cos x}\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{|x^5 - 32|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(8 punti)*

---

5. Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^4 - y^3 - 4x^2 - 3y^2 + 5\,,$$

determinarne i punti critici e classificarli. Dire inoltre se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2$. *(5 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (18/9/2007)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 21 settembre; ◯ 24–25 settembre.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.

2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.

3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{3}+\operatorname{sen}\alpha}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+\beta\ln n}+5}{e^{n+2}+3n^2}$$

(al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(2x+3)\big)^\alpha}{(x+3)^3}\,dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$. *(8 punti)*

---

3. a) Calcolare

$$\left((2-2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right)\right)^8;$$

b) disegnare l'insieme delle soluzioni complesse di

$$\big(|z-i|-2\big)\cdot\big(z\overline{z}+3\operatorname{Im}(z)-z^2\big)=0\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x^{2/3}\,|3x-1|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore delle seguenti successioni, e dire se si tratta, rispettivamente, di massimo e minimo:

$$a_n = \operatorname{arctg}\frac{3n}{n+2}\,, \qquad b_n = 5(-1)^n + a_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(6 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (18/9/2007)

Cognome e nome. . . . .

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 21 settembre; ◯ 24–25 settembre.

Note. . . . .

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+6}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{2}}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n-\beta\ln n}+n}{e^{n+3}+2n^2}$$

(al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). *(7 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(3x+2)\big)^\alpha}{(x+2)^3}\, dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$. *(8 punti)*

---

3. a) Calcolare

$$\left(\left(\frac{1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(\sqrt{2} - i\sqrt{2})\right)^8;$$

b) disegnare l'insieme delle soluzioni complesse di

$$\big(|z-2i|-1\big)\cdot\big(z\overline{z} - 2\operatorname{Re}(z) + z^2\big) = 0\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x^{2/3}\,|2x+3|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore delle seguenti successioni, e dire se si tratta, rispettivamente, di massimo e minimo:

$$a_n = \ln\frac{5n}{n+1}\,, \qquad b_n = 7(-1)^n + a_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(6 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♡ (14/12/2007)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 17–19 dicembre; ◯ 19–21 dicembre; ◯ 7–10 gennaio; ◯ 14–17 gennaio.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\operatorname{arcsen}(\alpha-3)\big)^{2n}}{(5+2\log n)^{n/4}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+\log n}{2^{\alpha n}+3n^5}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{3}{x}+5\right) e^{-2/x}\,\frac{dx}{x^{2\alpha}}\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$. *(7 punti)*

---

3. a) Risolvere l'equazione

$$z^2 + 3\overline{z}\,\mathrm{Re}z + 4i = 0\,;$$

b) risolvere l'equazione

$$iz^5 - 1 + i = 0\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x - 5x\,|\log x|}{\log x}\,,$$

e in particolare: dominio, segno, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(9 punti)*

---

5. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{3x^4 - x}\,; \qquad g(x) = \sqrt{4x^6+3x} - 2x^3\,; \qquad h(x) = x^{-\sqrt{x-2}}\,; \qquad k(x) = \frac{1}{\log(3^x+x^2) - \operatorname{sen}x}\,.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♠ (14/12/2007)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 17–19 dicembre; ◯ 19–21 dicembre; ◯ 7–10 gennaio; ◯ 14–17 gennaio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\arccos(\alpha-2)\big)^{2n}}{(5\log n+3)^{n/3}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6\log n+n^2}{2n^3+3^{\alpha n}}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-3/x}\Big(1-\frac{2}{x}\Big)\frac{dx}{x^{\alpha-3}}\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 5$. *(7 punti)*

---

3. a) Risolvere l'equazione

$$8\overline{z}\,\mathrm{Re}z + z^2 = 2i\,;$$

b) risolvere l'equazione

$$z^6 - \frac{3-6i}{2+i} = 0\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x\,|\log x| - 3x}{\log x}\,,$$

e in particolare: dominio, segno, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(9 punti)*

---

5. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2x^2+\sqrt{x}}\,; \qquad g(x) = \sqrt{9x^4+5} - 3x^2\,; \qquad h(x) = x^{1-\log x}\,; \qquad k(x) = \frac{1}{2\cos x + x^2\log(2^x+7)}\,.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (14/12/2007)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

○ 17–19 dicembre; ○ 19–21 dicembre; ○ 7–10 gennaio; ○ 14–17 gennaio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\operatorname{arcsen}(\alpha-3)\big)^{2n}}{(5+2\log n)^{n/4}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+\log n}{2^{\alpha n}+3n^5}.$$

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{3}{x}+5\right) e^{-2/x}\, \frac{dx}{x^{2\alpha}},$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$. *(7 punti)*

---

3. a) Risolvere l'equazione

$$z^2 + 3\overline{z}\,\mathrm{Re}\, z + 4i = 0;$$

b) risolvere l'equazione

$$iz^5 - 1 + i = 0.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x - 5x\,|\log x|}{\log x},$$

e in particolare: dominio, segno, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(9 punti)*

---

5. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{3x^4 - x}; \qquad g(x) = \sqrt{4x^6+3x} - 2x^3; \qquad h(x) = x^{-\sqrt{x-2}}; \qquad k(x) = \frac{1}{\log(3^x+x^2) - \operatorname{sen} x}.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (14/12/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 17–19 dicembre; ◯ 19–21 dicembre; ◯ 7–10 gennaio; ◯ 14–17 gennaio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\arccos(\alpha-2)\big)^{2n}}{(5\log n+3)^{n/3}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6\log n+n^2}{2n^3+3^{\alpha n}}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-3/x}\Big(1-\frac{2}{x}\Big)\frac{dx}{x^{\alpha-3}}\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 5$. *(7 punti)*

---

3. a) Risolvere l'equazione

$$8\overline{z}\,\mathrm{Re}z + z^2 = 2i\,;$$

b) risolvere l'equazione

$$z^6 - \frac{3-6i}{2+i} = 0\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x\,|\log x| - 3x}{\log x}\,,$$

e in particolare: dominio, segno, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(9 punti)*

---

5. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2x^2+\sqrt{x}}\,; \qquad g(x) = \sqrt{9x^4+5} - 3x^2\,; \qquad h(x) = x^{1-\log x}\,; \qquad k(x) = \frac{1}{2\cos x + x^2\log(2^x+7)}\,.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (14/12/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 17–19 dicembre; ◯ 19–21 dicembre; ◯ 7–10 gennaio; ◯ 14–17 gennaio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\operatorname{arcsen}(\alpha-3)\big)^{2n}}{(5+2\log n)^{n/4}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+\log n}{2^{\alpha n}+3n^5}.$$

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{3}{x}+5\right) e^{-2/x} \frac{dx}{x^{2\alpha}},$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$. *(7 punti)*

---

3. a) Risolvere l'equazione

$$z^2 + 3\overline{z}\,\mathrm{Re}z + 4i = 0;$$

b) risolvere l'equazione

$$iz^5 - 1 + i = 0.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x - 5x\,|\log x|}{\log x},$$

e in particolare: dominio, segno, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(9 punti)*

---

5. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{3x^4 - x}; \qquad g(x) = \sqrt{4x^6+3x} - 2x^3; \qquad h(x) = x^{-\sqrt{x-2}}; \qquad k(x) = \frac{1}{\log(3^x+x^2) - \operatorname{sen} x}.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (14/12/2007)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 17–19 dicembre; ◯ 19–21 dicembre; ◯ 7–10 gennaio; ◯ 14–17 gennaio.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\arccos(\alpha-2)\big)^{2n}}{(5\log n+3)^{n/3}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6\log n+n^2}{2n^3+3^{\alpha n}}\,.$$

(7 punti)

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-3/x}\Big(1-\frac{2}{x}\Big)\frac{dx}{x^{\alpha-3}}\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 5$. *(7 punti)*

---

3. a) Risolvere l'equazione

$$8\overline{z}\,\mathrm{Re}z + z^2 = 2i\,;$$

b) risolvere l'equazione

$$z^6 - \frac{3-6i}{2+i} = 0\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x\,|\log x| - 3x}{\log x}\,,$$

e in particolare: dominio, segno, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(9 punti)*

---

5. Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2x^2+\sqrt{x}}\,; \qquad g(x) = \sqrt{9x^4+5} - 3x^2\,; \qquad h(x) = x^{1-\log x}\,; \qquad k(x) = \frac{1}{2\cos x + x^2\log(2^x+7)}\,.$$

(7 punti)

Compito $\diamondsuit$ - Risultati

1. a) Converge $\forall\alpha$ per cui la serie è definita, cioè per $\alpha\in[2,4]$

   b) Converge se e solo se $\alpha>0$.

2. L'integrale converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$\int \left(\frac{3}{x}+5\right) e^{-\frac{2}{x}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} e^{-\frac{2}{x}} \left(\frac{6}{x}+13\right)$$

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{3}{x}+5\right) e^{-2/x} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\left(13-\frac{19}{e^2}\right).$$

3. a) $z = \pm\sqrt{2}\,(1+2i)$

   b) $z = \sqrt[10]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{5}\pi\right)}$, $k=0,1,2,3,4$.

5. In ordine crescente: $k(x)$, $g(x)$, $f(x)$, $h(x)$.

4. Dominio: $(0,1)\cup(1,+\infty)$. f derivabile nel suo dominio.

$f(x)=0$ per $x=e^{\pm 2/5}$; $f(x)>0$ in $(0,e^{-2/5})\cup(1,e^{2/5})$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$x=1$ asintoto verticale. Non ammette asintoto obliquo.

$$f'(x) = \frac{2(\log x - 1)}{\log^2 x} - 5\,\mathrm{sign}(\log x);\quad f''(x) = -\frac{2}{x}\,\frac{\log x - 2}{\log^3 x}.$$

f crescente in $\left(0, e^{\frac{-1-\sqrt{11}}{5}}\right]$; decrescente in $\left[e^{\frac{-1-\sqrt{11}}{5}}, 1\right)$ e in $(1,+\infty)$.

$x = e^{\frac{-1-\sqrt{11}}{5}}$ punto di massimo relativo.

f convessa in $(1,e^2]$; concava in $(0,1)$ e in $[e^2,+\infty)$.

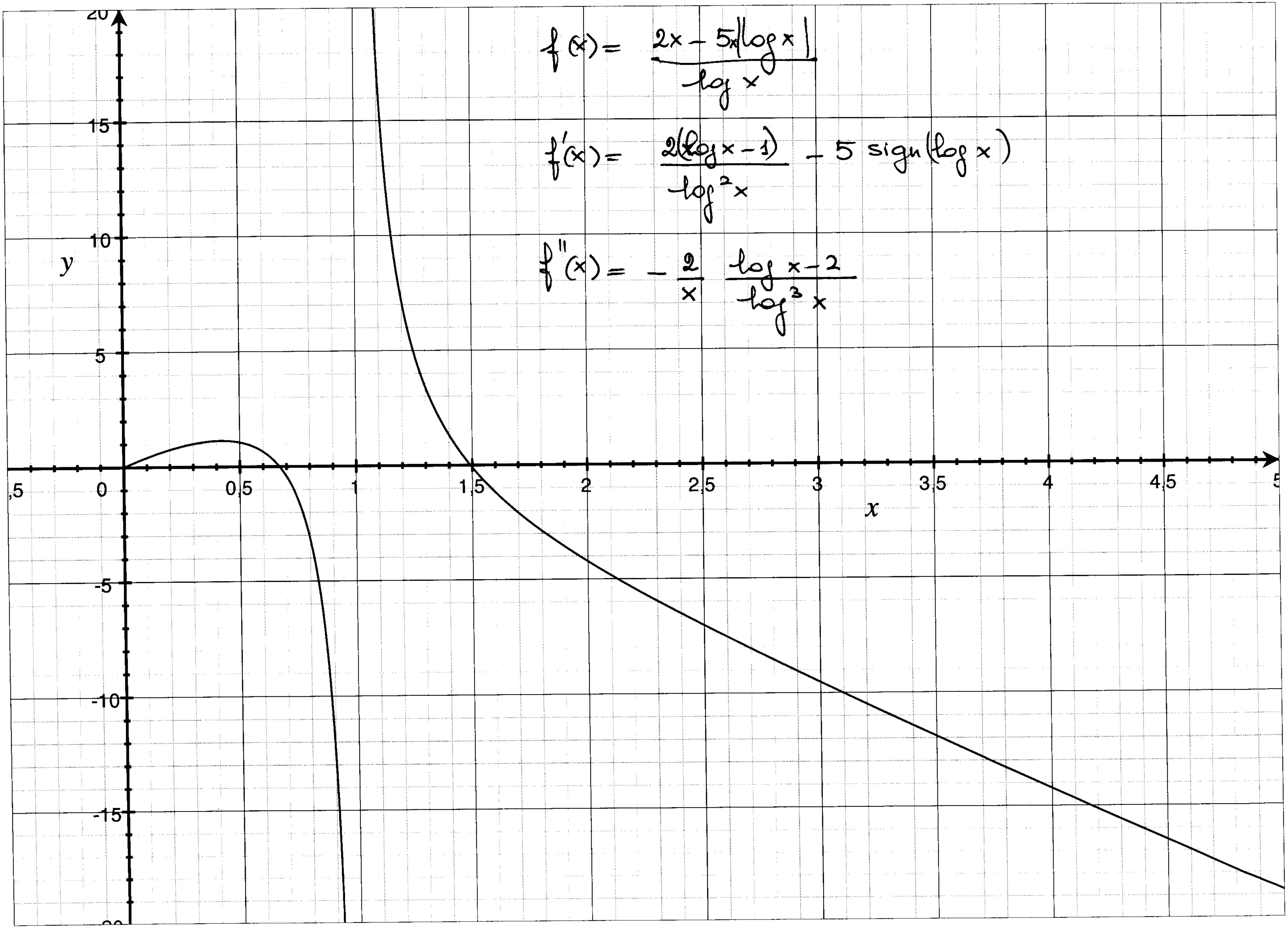
$x=e^2$ è punto di flesso.

Se si pone $f(0)=0$, si ottiene una funzione derivabile nell'origine, e si ha $f'(0)=5$.

$$f(x) = \frac{2x - 5x|\log x|}{\log x}$$

$$f'(x) = \frac{2(\log x - 1)}{\log^2 x} - 5\,\mathrm{sign}(\log x)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x}\,\frac{\log x - 2}{\log^3 x}$$



Compito ♣ - Risultati

1. a) Converge $\forall \alpha$ per cui la serie è definita, cioè per $\alpha \in [1,3]$.

   b) Converge se e solo se $\alpha > 0$.

2. Converge se e solo se $\alpha > 4$.

$$\int e^{-3/x} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-3/x}}{9} \left(1 - \frac{6}{x}\right)$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-3/x} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{9} \left(1 + 5e^{-3}\right)$$

3. a) $z = \pm\left(\frac{1}{3} - i\right)$

   b) $z = \sqrt[6]{3}\; e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

5. In ordine crescente: $f(x)$, $g(x)$, $K(x)$, $h(x)$.

4. Dominio: $(0,1) \cup (1,+\infty)$. f derivabile nel suo dominio.

   $f(x) = 0$ per $x = e^{\pm\frac{3}{2}}$. $f(x) > 0$ in $(e^{-3/2}, 1) \cup (e^{3/2}, +\infty)$.

   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   $x = 1$ asintoto verticale. Non ammette asintoto obliquo.

   $f'(x) = 2 \operatorname{sign} \log x - 3 \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{3}{x} \dfrac{\log x - 2}{\log^3 x}$

   f crescente in $\left[e^{\frac{-3-\sqrt{33}}{4}}, 1\right)$ e in $(1, +\infty)$,

   decrescente in $\left(0, e^{\frac{-3-\sqrt{33}}{4}}\right]$. $x = e^{\frac{-3-\sqrt{33}}{4}}$ pto di min. relativo.

   f convessa in $(0,1)$ e in $[e^2, +\infty)$, concava in $(1, e^2]$.

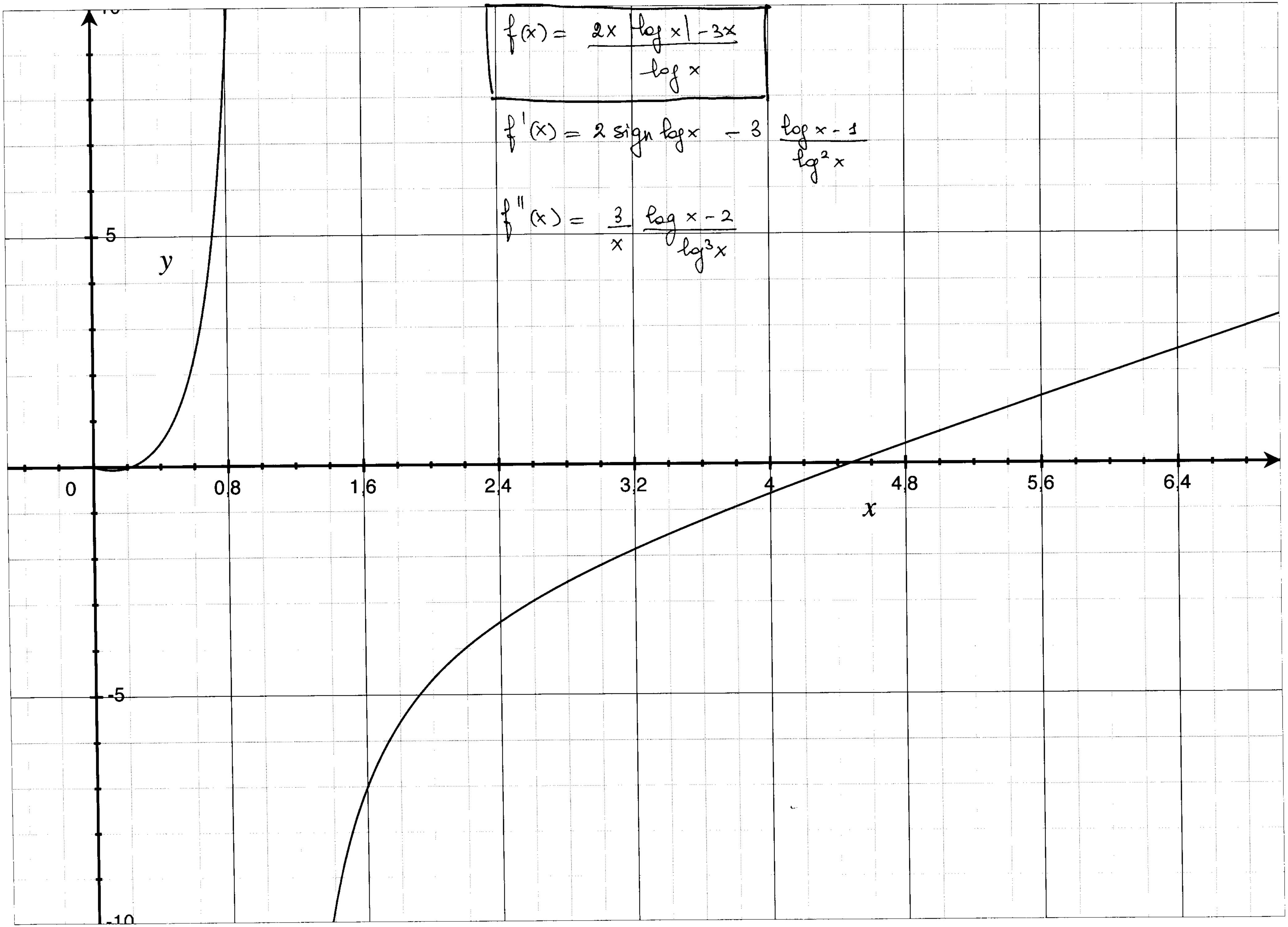
   $x = e^2$ è punto di flesso.

   Se si pone $f(0) = 0$, si ottiene una funz. derivabile in 0, $f'(0) = -2$.

$$\boxed{f(x) = \frac{2x\,|\log x| - 3x}{\log x}}$$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sign}\log x - 3\,\frac{\log x - 1}{\log^2 x}$$

$$f''(x) = \frac{3}{x}\,\frac{\log x - 2}{\log^3 x}$$



ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (11/1/2008)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 14–16 gennaio; ◯ 16–18 gennaio.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. a) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+5} - n^{2/3} \right)^{\alpha} ;$$

b) studiare convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{\ln(n+3)}{1+n} \, .$$

(7 punti)

---

2. Calcolare

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}} \, dx \, ,$$

e successivamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^2 x - 4\cos x + 3}} \, dx \, .$$

(7 punti)

---

3. Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 4xy - xy^2 \, ,$$

trovarne i punti critici e i punti di massimo/minimo relativo. *(5 punti)*

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x^{4/3} \left(\ln(x^2) - 5 \right) ,$$

e in particolare: dominio, segno, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(10 punti)*

---

5. Trovare l'ordine di infinito/infinitesimo, per $x \to +\infty$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \cos \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 + \ln(1 + \frac{2}{x}) ; \qquad g(x) = (x^2-3)\sqrt{x^2+2} - x^3 + x \, .$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♠ (11/1/2008)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 14–16 gennaio; ◯ 16–18 gennaio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. a) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{4/3} - \sqrt[3]{n^4-2}\right)^{\alpha} ;$$

b) studiare convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(2n+1)}{n+3} .$$

(7 punti)

---

2. Calcolare

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-6x+5}}\, dx ,$$

e successivamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x - \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 6 \operatorname{sen} x + 5}}\, dx .$$

(7 punti)

---

3. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 y - y^3 - 2xy + 2y^2 ,$$

trovarne i punti critici e i punti di massimo/minimo relativo. *(5 punti)*

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x^{5/3}\left(1 - \ln(x^4)\right) ,$$

e in particolare: dominio, segno, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Infine, dire se la funzione è prolungabile in modo continuo/derivabile nell'origine. *(10 punti)*

---

5. Trovare l'ordine di infinito/infinitesimo, per $x \to +\infty$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{x}} - e^{2/x} ; \qquad g(x) = x^3 - (x^2+3)\sqrt{x^2-4} .$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (18/3/2008)

Cognome e nome..
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 27–28 marzo; ◯ 2–3 aprile.
Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(5+\alpha^2 n^2)^{\alpha-3}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5+\operatorname{arctg} n)(\sqrt{\alpha+1})^n}{(3+\alpha)^n}\,.$$

(7 punti)

---

2. Calcolare l'area della regione del piano cartesiano definita dalle disuguaglianze $y \le f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x\,(4+\ln^2 x)\,\ln x}$, $x \ge e$, $y \ge 0$. *(7 punti)*

---

3. a) Trovare le radici cubiche di z^3, dove $z = \sqrt{3} - i$;
b) Risolvere l'equazione

$$z = 3\mathrm{Re}z - \overline{z} + z^2 - |z|\,;$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 4\,|\operatorname{sen} x|^3 - 9 \operatorname{sen} x\,,$$

e in particolare: dominio, segno, eventuali simmetrie e periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^3 \ln x - x\,; \qquad g(x) = \ln(1+3x^2) - 3x^2\,; \qquad h(x) = \frac{e^{\operatorname{sh} x} - e^x}{\sqrt{x}}\,.$$

(7 punti)

Cognome e nome..
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 27–28 marzo; ◯ 2–3 aprile.
Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare il carattere di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(6+\alpha^2 n)^{2\alpha-4}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{\alpha+2})^n (4-\operatorname{arctg} n)}{(5+\alpha)^n}\,.$$

(7 punti)

---

2. Calcolare l'area della regione del piano cartesiano definita dalle disuguaglianze $y \le f(x) = \dfrac{2+\ln x}{x\,(9+\ln^2 x)\,\ln x}$, $x \ge e$, $y \ge 0$. *(7 punti)*

---

3. a) Trovare le radici cubiche di z^3, dove $z = 1 - i\sqrt{3}$;
b) Risolvere l'equazione

$$z = 4\,\mathrm{Re}z - \overline{z} - |z| + z^2\,;$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 4\,|\cos x|^3 - 3\cos x\,,$$

e in particolare: dominio, segno, eventuali simmetrie e periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^3 \ln x + 3x\,; \qquad g(x) = \sqrt{1+2x^2} - 1 - x^2\,; \qquad h(x) = e^{x\,\mathrm{sh}\,x} - e^{x^2}\,.$$

(7 punti)

Compito ◊

1a. La serie converge se e solo se $\alpha > 4$.

1b. E' una serie di potenze. Converge per tutti gli α t.c.

$$\frac{\sqrt{\alpha+1}}{|3+\alpha|} < 1, \quad \text{cioè} \quad \forall \alpha \geq -1$$

---

2. $$\int \frac{1+\ln x}{x \ln x\,(4+\ln^2 x)}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}\ln(\ln x) - \frac{1}{8}\ln(4+\ln^2 x) + c$$

$$\text{Area} = \int_e^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x \ln x\,(4+\ln^2 x)}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\ln 5 - \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\ln 5 + \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,2.$$

3a. $z = 2i$, $\quad z = \pm\sqrt{3} - i$

3b. $z = 0$, $\quad z = 2$

---

4. f è periodica di periodo 2π e continua in $\mathbb{R}$.

La studio per $x \in [-\pi, \pi]$

$f = 0 \iff x = -\pi, 0, \pi$

$f(x) > 0 \iff x \in (-\pi, 0)$

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,(4\,\text{sen}^2 x - 3)\cos x & 0 < x < \pi \\ -3\,(4\,\text{sen}^2 x + 3)\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

f risulta derivabile anche in 0, $\pm\pi$, e si ha:

$f'(0) = -9 \qquad f'(\pm\pi) = 9$

f strettamente crescente in $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, in $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ e in $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$

strettamente decrescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$ e in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right]$

(quindi, tenuto conto della periodicità, strettamente crescente in $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$).

$x = -\frac{\pi}{2}$ p.to di max. assoluto

$x = \frac{\pi}{2}$ " " max. relativo

$x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{2}{3}\pi$ p.ti di min. assoluto.

$$f''(x) = \begin{cases} 3 \operatorname{sen} x \quad (11 - 12 \operatorname{sen}^2 x) & 0 < x < \pi \\ 3 \operatorname{sen} x \quad (12 \operatorname{sen}^2 x - 5) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

f ammette derivata seconda in $x = 0, \pm\pi$. In questi punti $f'' = 0$.

f risulta convessa in $\left[-\pi, -\pi + \arcsin\sqrt{\frac{5}{12}}\right]$,

in $\left[-\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{12}}, \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{11}{12}}\right]$ e in $\left[\pi - \arcsin\sqrt{\frac{11}{12}}, \pi\right]$

concava in $\left[-\pi + \arcsin\sqrt{\frac{5}{12}}, -\arcsin\sqrt{\frac{5}{12}}\right]$ e in

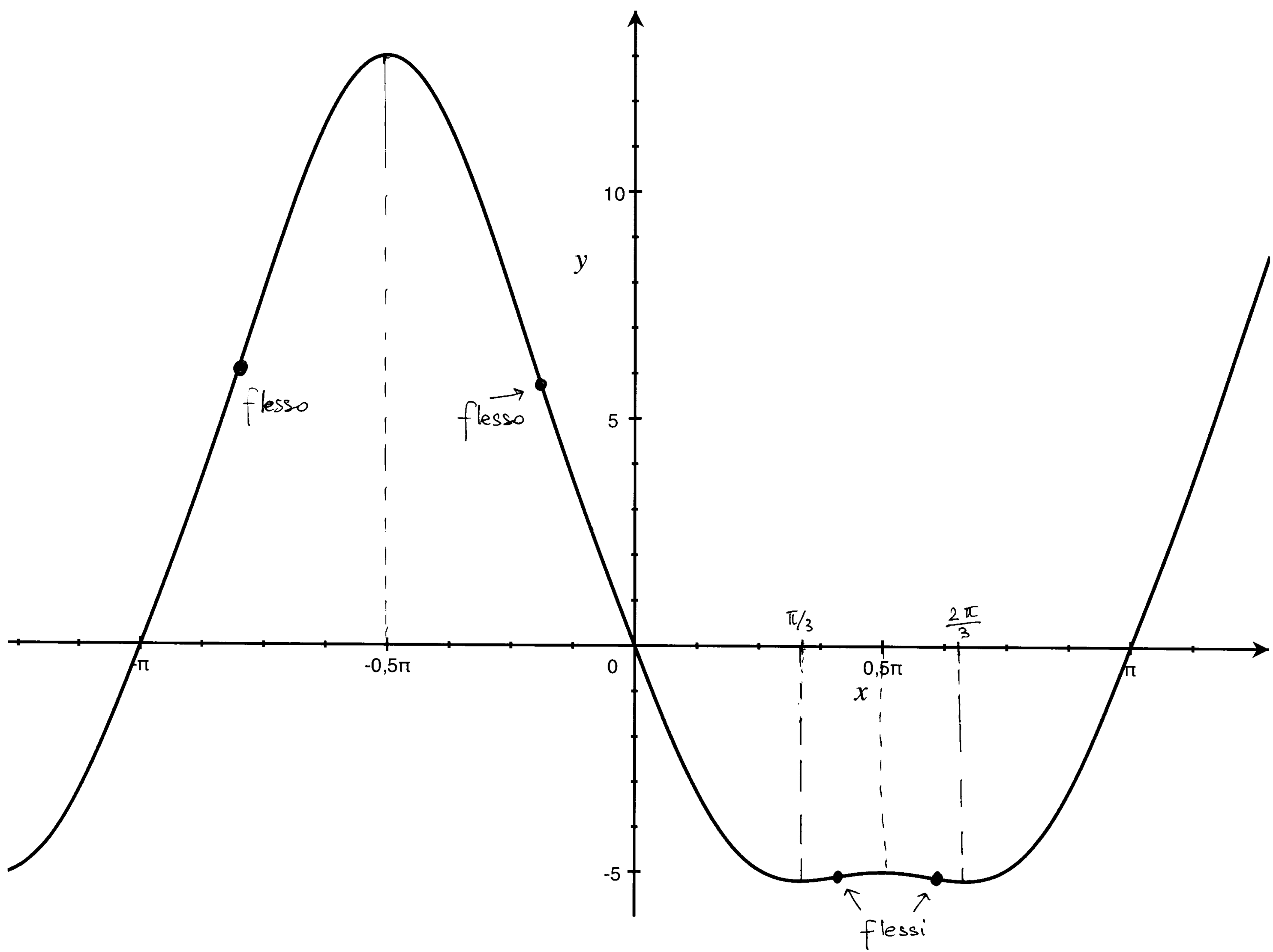
$\left[\arcsin\sqrt{\frac{11}{12}}, \pi - \arcsin\sqrt{\frac{11}{12}}\right]$

(quindi in realtà è convessa in $\left[\pi - \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{11}{12}}, \pi + \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{12}}\right]$).

I punti $x = -\pi + \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{12}}$, $x = -\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{12}}$,

$x = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{11}{12}}$ $x = \pi - \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{11}{12}}$ sono p.ti di flesso

Nei punti $x = 0, \pm\pi$ invece la convessità non cambia.



y
10
5
0
-5
x
-π
-0,5π
π/3
0,5π
2π/3
π
flesso
flesso
flessi

5. Per $x \to 0$ si ha:

$f(x) \sim x$ infinitesimo di ordine 1

$g(x) \sim -\frac{9}{2}x^4$ inf.mo di ordine 4

$h(x) \sim \frac{x^{5/2}}{6}$ inf.mo di ordine $5/2$.

Compito ♣ :

1a. La serie converge se e solo se $\alpha > 3$

1b. E' una serie di potenze, converge per tutti gli α t.c

$$\frac{\sqrt{\alpha+2}}{|5+\alpha|} < 1, \text{ cioè per tutti gli } \alpha \geq -2.$$

---

2. $$\int \frac{2+\ln x}{x \ln x \,(9+\ln^2 x)}\,dx = \frac{2}{9} \ln \ln x - \frac{1}{9} \ln(9+\ln^2 x) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3} + c$$

$$\text{Area} = \int_e^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x \ln x \,(9+\ln^2 x)}\,dx = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{9} \ln 10 - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3 + \frac{1}{9} \ln 10 .$$

3a. $z = -2, \; z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

3b. $z = 0, \quad z = -3$.

---

4. f è periodica di periodo 2π, inoltre è pari $\Rightarrow$ la studio in $[0,\pi]$.

f è continua in $\mathbb{R}$.

$$f = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \text{ opp. } x = \frac{\pi}{6}$$

$$f(x) > 0 \iff 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ oppure } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 \operatorname{sen} x \,(1 - 4\cos^2 x) & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 3 \operatorname{sen} x \,(1 + 4\cos^2 x) & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

f risulta derivabile anche in $x = \frac{\pi}{2}$, e si ha $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

f strettamente crescente in $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$x = 0$ p.to di max. relativo

$x = \pi$ p.to di max. assoluto

$x = \frac{\pi}{3}$ p.to di min. assoluto.

$$f''(x) = \begin{cases} 9 \cos x \,(3 - 4\cos^2 x) & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 3 \cos x \,(12 \cos^2 x - 7) & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

f risulta derivabile due volte anche in $x = \frac{\pi}{2}$, e si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

f è convessa in $\left[\frac{\pi}{6}, \arccos\left(-\sqrt{\frac{7}{12}}\right)\right]$

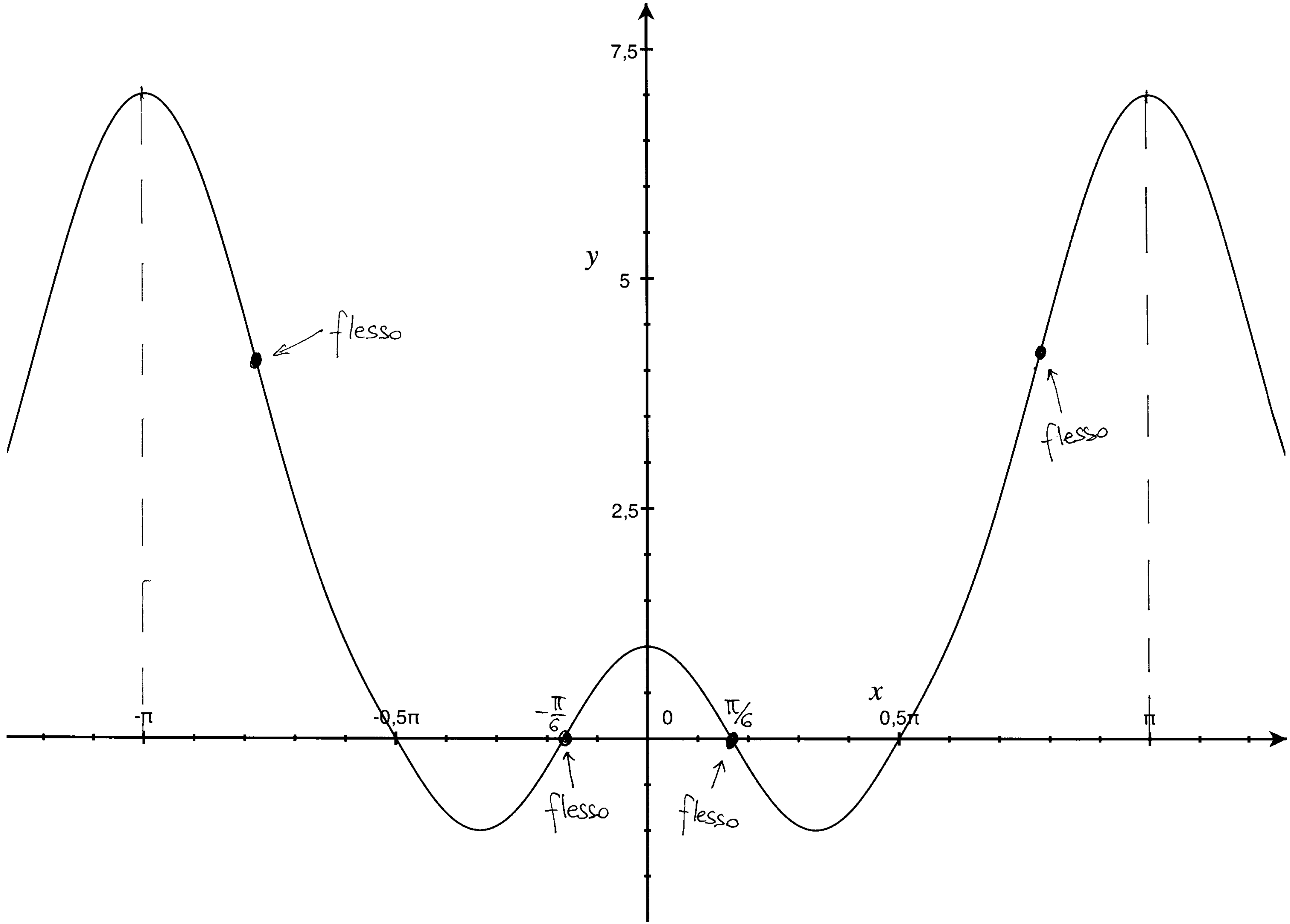
f è concava in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e in $\left[\arccos\left(-\sqrt{\frac{7}{12}}\right), \pi\right]$

Quindi in realtà è convessa anche in $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

concava anche in $\left[\arccos\left(-\sqrt{\frac{7}{12}}\right), 2\pi - \arccos\left(-\sqrt{\frac{7}{12}}\right)\right]$

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \arccos\left(-\sqrt{\frac{7}{12}}\right)$ sono punti di flesso

Invece $x = \frac{\pi}{2}$ non è di flesso (non cambia la convessità).



7,5
y
5
flesso
flesso
2,5
x
-π
-0,5π
$-\frac{\pi}{6}$
0
$\pi/6$
0,5π
π
flesso
flesso

5. per $x \to 0^+$ si ha

$f(x) \sim 3x$ Infinitesimo di ordine 1

$g(x) \sim -\frac{x^4}{2}$ " " " 4

$h(x) \sim \frac{x^4}{6}$ " " " 4 .

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (9/7/2008)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

○ 11 luglio (max. 6 persone); ○ 21–25 luglio; ○ 29–31 luglio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2n + \alpha^n}.$$

Per $\alpha = 6$, calcolarne la somma a meno di un errore inferiore a $\frac{1}{5}$. *(7 punti)*

---

2. Trovare per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{e^{-2x^2} x}{(x^2-9)^\alpha}\, dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = -1$. *(7 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right),$$

(dove $\exp(t) = e^t$) e in particolare: dominio, segno, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,; \qquad g(x) = \sqrt[3]{1+3x^3} - 1 - x^3\,; \qquad h(x) = \frac{x^3}{\ln^2 x} + x^2\,.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (9/7/2008)

Cognome e nome..
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 11 luglio (max. 6 persone); ◯ 21–25 luglio; ◯ 29–31 luglio.
Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3n + \alpha^n}.$$

Per $\alpha = 4$, calcolarne la somma a meno di un errore inferiore a $\frac{1}{10}$. *(7 punti)*

---

2. Trovare per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-3x^2} x}{(x^2-1)^\alpha}\, dx,$$

e calcolarlo per $\alpha = -1$. *(7 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = \operatorname{sh} x \cos y.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{2-x}{2+x}\right),$$

(dove $\exp(t) = e^t$) e in particolare: dominio, segno, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

5. Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x); \qquad g(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\ln x} + 2\sqrt{x}; \qquad h(x) = \sqrt[4]{1-4x^4} - 1 + x^4.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (8/9/2008)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 11–12 settembre; ◯ 23 settembre (max. 15 persone).

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\operatorname{tg}\alpha)^{3n}}{2n+2^n}\,.$$

Per $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$, calcolarne la somma a meno di un errore inferiore a $\dfrac{1}{50}$. *(7 punti)*

---

2. Trovare per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}+2)\, e^{-\sqrt{x}}}{x^\alpha}\, dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = \dfrac{1}{2}$. *(7 punti)*

---

3. Sia $z = i + \sqrt{3}$. Calcolare

$$z^{-8}\,, \quad (z\overline{z})^2\,, \quad z+\overline{z}\,, \qquad \sqrt[4]{z}\,, \quad e^z\,.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 2 - 3\sqrt{|x|}\, e^{1-|x|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$. *(9 punti)*

---

5. Calcolare i seguenti limiti, al variare dei parametri reali $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x^\alpha)}{x^3+x}\,; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\beta \operatorname{sh} x + \gamma(e^x-1) - (x^3-4x^2-x)}{x^3}\,.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (8/9/2008)

Cognome e nome..
◯ 11–12 settembre; ◯ 23 settembre (max. 15 persone).
Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4 \operatorname{sen} \alpha)^{3n}}{3^n + 2n}.$$

Per $\alpha = -\operatorname{arcsen} \frac{1}{4}$, calcolarne la somma a meno di un errore inferiore a $\frac{1}{100}$. *(7 punti)*

---

2. Trovare per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 + x^\alpha)\, e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx,$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$. *(7 punti)*

---

3. Sia $z = -i + \sqrt{3}$. Calcolare

$$z^{-6}, \quad (z\overline{z})^3, \quad z - \overline{z}, \qquad \sqrt[4]{z}, \quad e^z.$$

(6 punti)

---

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x|}\, e^{2-|x|} - 1,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. Dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$. *(9 punti)*

---

5. Calcolare i seguenti limiti, al variare dei parametri reali $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^\alpha)}{x + 2x^2}; \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\beta(e^{2x} - 1) + \gamma \ln(1 + x) - (x^3 + 5x^2 - x)}{x^3}.$$

(7 punti)

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (21/1/2009)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 28–30 gennaio; ◯ 2–5 febbraio; ◯ 16–20 febbraio.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = 1 - \sqrt{|x^4 - 2x^2|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - \operatorname{sen}^2 x + 6}\,dx$$

e l'integrale definito

$$\int_0^4 f(x)\,dx\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \log(1 + 2x^2 + 2y^2) - xy\,.$$

(6 punti)

---

4. Al variare del parametro indicato, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + \log^2 n}{n^2 + 3^{\alpha n}} \quad (\alpha \in \mathbf{R})\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+\log n}}{n^2+5}\,(x-1)^n \quad (x \in \mathbf{R})\,.$$

(7 punti)

---

5. a) Trovare l'ordine dei seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$\log(1 + 4\operatorname{sen}^3 x)\,, \qquad \frac{e^{4x^2} - 1 - 4x^2}{\sqrt{x} - \operatorname{sen}\sqrt{x}}\,.$$

b) Trovare un polinomio $P(x)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - P(x)\big) = 0\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (21/1/2009)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 28–30 gennaio; ◯ 2–5 febbraio; ◯ 16–20 febbraio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = 2 + \sqrt{|x^4 - x^2|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{6\,\mathrm{sen}\,x - \cos^2 x + 14}\,dx$$

e l'integrale definito

$$\int_0^5 f(x)\,dx\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \log(1 + 2x^2 + 2y^2) - xy\,.$$

(6 punti)

---

4. Al variare del parametro indicato, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + \log n}{n^3 + 2^{\alpha n}} \quad (\alpha \in \mathbf{R})\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n-\log n}}{n^2+4}\,(x-2)^n \quad (x \in \mathbf{R})\,.$$

(7 punti)

---

5. a) Trovare l'ordine dei seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$\log(1 + 4\,\mathrm{sen}\,x^3)\,, \qquad \frac{e^{3x^2} - 1 - 3x^2}{1 - \cos\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}}\,.$$

b) Trovare un polinomio $P(x)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - P(x)\big) = 0\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♡ (21/1/2009)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 28–30 gennaio; ◯ 2–5 febbraio; ◯ 16–20 febbraio.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = 1 + \sqrt{|3x^2 - x^4|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{2\,\mathrm{sen}\, x - \cos^2 x + 6}\, dx$$

e l'integrale definito

$$\int_0^4 f(x)\, dx\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2) - xy\,.$$

(6 punti)

---

4. Al variare del parametro indicato, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n - \log n}{5^{\alpha n} + n^2} \quad (\alpha \in \mathbf{R})\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+\log_2 n}}{n^2 + 1}(x+1)^n \quad (x \in \mathbf{R})\,.$$

(7 punti)

---

5. a) Trovare l'ordine dei seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$\log(1 - \mathrm{tg}^2\, x)\,, \qquad \frac{x^2 - \mathrm{sh}\, x^2}{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}}\,.$$

b) Trovare un polinomio $P(x)$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - P(x)\big) = 0\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♠ (21/1/2009)

Cognome e nome..

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 28–30 gennaio; ◯ 2–5 febbraio; ◯ 16–20 febbraio.

Note..

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = 3 - \sqrt{|x^4 - 4x^2|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{4\cos x - 4\operatorname{sen}^2 x + 9}\,dx$$

e l'integrale definito

$$\int_0^3 f(x)\,dx\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2) - xy\,.$$

(6 punti)

---

4. Al variare del parametro indicato, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log n^2 + 3n^2}{4^{\alpha n} + n^3} \quad (\alpha \in \mathbf{R})\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+\log_3 n}}{n+6}\,(x+2)^n \quad (x \in \mathbf{R})\,.$$

(7 punti)

---

5. a) Trovare l'ordine dei seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$\log(1 + 2\operatorname{tg} x^3)\,, \qquad \frac{\cos x^2 - 1 + \frac{x^4}{2}}{x - \operatorname{sen} x}\,.$$

b) Trovare un polinomio $P(x)$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - P(x)\big) = 0\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione definita nel precedente esercizio 1. *(7 punti)*

ANALISI MATEMATICA - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♢ (21/11/2009)

Cognome e nome...

La prova teorica si svolgerà nella settimana 30 novembre–4 dicembre.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \frac{2x^3}{x^3+4}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo. *(9 punti)*

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^\alpha x \, \ln(\cos x)\, dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 3$. *(8 punti)*

---

3. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + 2x\,,$$

e calcolarne massimo e minimo assoluti nell'insieme

$$E = \left\{2x^2 + 3y^2 \leq 1\right\}\,.$$

(7 punti)

---

4. Studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)\,.$$

(7 punti)

---

5. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\,, \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\,.$$

(6 punti)