ANALISI MATEMATICA I

per Ingegneria Aerospaziale - A.A. 2012-2013

– Diario delle lezioni –

Questo è un indice degli argomenti trattati a lezione, che ha anche funzione di programma del corso. Prego gli studenti di segnalarmi eventuali errori. Le date in cui sono stati affrontati i vari argomenti sono indicative. I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati. Tutti gli argomenti possono essere studiati sul libro di testo [1] (oppure su [2]), eccetto dove indicato. Questo diario delle lezioni è curato dal docente Andrea Dall'Aglio.

Lunedì 1 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Presentazione del corso di Analisi Matematica I.
- Cenni sui **numeri naturali, interi relativi, razionali** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
- **Teorema:** non esiste alcun numero razionale q tale che $q = 2$.
- **Richiami di insiemistica.**

Mercoledì 3 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema:** ad ogni razionale corrisponde uno sviluppo decimale finito o periodico. Viceversa, ad ogni sviluppo decimale finito o periodico che non termini con una sequenza di infiniti 9 corrisponde un unico numero razionale (s.d.).
- **Numeri reali** $\mathbb{R}$**,** come sviluppi decimali finiti o infiniti, non necessariamente periodici. Operazioni in $\mathbb{R}$ e loro proprietà.
- Rappresentazione dei reali su una retta.
- **Teorema di densità** dei razionali nei reali.
- **Teorema di densità** degli irrazionali nei reali.

Giovedì 4 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Definizione di **funzione.**
- **Dominio, codominio, immagine.**
- **Immagine di un sottoinsieme del dominio.**
- **Prodotto cartesiano di insiemi. Grafico di una funzione.**
- **Dominio naturale** di una funzione reale di variabile reale.
- **Successioni.**
- **Funzioni suriettive.**
- Una funzione si può sempre rendere suriettiva restringendone il codominio.
- **Funzioni iniettive.** Esempi vari. Com'è fatto il grafico di una funzione iniettiva. Alcuni esempi su come si può rendere iniettiva una funzione restringendone il dominio.
- **Esercizio:** Verificare che la funzione $f(x) = 2x - 3$ è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
- **Esercizio:** Verificare che la funzione $f(x) = 1 - x^2$ non è né iniettiva né suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Fare opportune restrizioni su dominio e codominio in modo da renderla iniettiva e/o suriettiva.
- **Esercizio:** Verificare che la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ non è né iniettiva né suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Fare opportune restrizioni su dominio e codominio in modo da renderla iniettiva e/o suriettiva.
- **Funzioni periodiche di periodo** T**.**
- **Osservazione:** le funzioni periodiche non sono mai iniettive.

Venerdì 5 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Controimmagine di un sottoinsieme del codominio.**
- **Oservazione:** Come si enunciano l'iniettività e la suriettività in termini di controimmagine degli elementi.
- **Funzioni biettive.**
- **Funzione inversa.**
- **Esercizio:** Verificare che la funzione $f(x) = 2x - 3$ è biettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, e calcolarne l'inversa.
- **Esercizio:** Verificare che
- **Esempio:** Verificare che la funzione $f(x) = x^2$ è biettiva da $[0, +\infty)$ a $[0, +\infty)$. La sua funzione inversa si chiama radice quadrata.
- **Osservazione:** Se f è biettiva, anche f^{-1} lo è, e $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Grafico della funzione inversa.
- **Funzioni composte.**
- **Osservazione:** Anche quando hanno senso entrambe le funzioni composte, in generale si ha $f \circ g \neq g \circ f$.
- **Osservazione:** Se $f : A \to B$ è biettiva, allora

$$f^{-1} \circ f = Id_A , \quad f \circ f^{-1} = Id_B .$$

- **Osservazione:** L'inversa di una funzione strettamente monotona è strettamente monotona (con lo stesso tipo di monotonia).
- **Funzioni pari, funzioni dispari** e loro grafici.
- **Funzioni crescenti (decrescenti), strettamente crescenti (decrescenti), monotòne, strettamente monotòne.**
- **Osservazione:** Una funzione strettamente monotona è iniettiva. Il viceversa non è vero senza aggiungere altre ipotesi. Ad esempio $f(x) = 1/x$ è iniettiva, ma non è monotona nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Riferimenti : Per la controimmagine, o immagine inversa, si può vedere [2], §7.

Lunedì 8 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Funzioni elementari: **funzioni affini, potenze (ad esponente intero naturale, relativo, razionale, irrazionale), esponenziali, logaritmi,** e loro proprietà.
- Proprietà elementari dei logaritmi (logaritmo del prodotto e del rapporto, logaritmo di una potenza, formula per il cambio di base etc.).
- **Esercizio:** Trovare il dominio naturale di
$$f(x) = \sqrt{3 + 4^{x+1/2} - 4^{2x}}$$
- **Esercizio:** Trovare il dominio naturale di
$$f(x) = \sqrt{3 + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1/2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}$$

Mercoledì 10 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Dimostrazione di alcune delle proprietà enunciate per i logaritmi.
- **Osservazione:** In generale le funzioni
$$f(x) = \ln(x(x-1))\,, \; g(x) = \ln x + \ln(x-1)$$
sono diverse tra loro (hanno domini diversi).
- **Funzioni periodiche** di **periodo** T.
- Funzioni trigonometriche: **seno, coseno, tangente, cotangente,** e loro proprietà.
- Funzioni trigonometriche inverse: **arcoseno, arcocoseno, arcotangente,** e loro proprietà.
- **Esercizio:** Risolvere l'equazione $\cos x < \dfrac{1}{5}$.
- **Osservazione:** In generale l'uguaglianza $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ è falsa. E' vera solo se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- Manipolazione di grafici di funzioni: Come cambia il grafico di $f(x)$ se prendiamo $f(x+a)$, $f(x)+a$, $af(x)$, $f(ax)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, ecc.
- **Esercizio:** Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = |\operatorname{sen}(3x)|$.
- **Esercizio:** Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
- **Esercizio:** Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Giovedì 11 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Valore assoluto** di un numero reale.
- Principali proprietà del valore assoluto.
- Grafico della funzione $f(x) = |x|$.
- Il valore assoluto della differenza come distanza in $\mathbb{R}$.
- **Osservazione:** Per $a \geq 0$ si ha
$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$$
- **Disuguaglianza triangolare.**
- **Esercizio:** Scrivere che forma ha, nei vari intervalli, la funzione
$$f(x) = \frac{|3x + x^2|}{3 - |x|}\,.$$
- **Osservazione**: Si ha $\sqrt{x^2} = |x|$.
- **Esercizio:** risolvere la disequazione
$$|x^2 - 2| > x - 1\,.$$
- **Esercizio:** risolvere la disequazione
$$|x + 2| < |x + 3|\,.$$

Venerdì 12 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Esercizio:** Calcolare il dominio naturale di
$$f(x)=\Big(\log_3\big(\log_4(x^2-5)\big)\Big)^{-4}.$$
- **Esercizio per casa:** Calcolare il dominio naturale di
$$f(x)=\Big(\log_3\big(\log_{1/4}(x^2-5)\big)\Big)^{-4}.$$
- **Esercizio:** Calcolare il dominio naturale di
$$f(x)=\sqrt{\log_{1/2}\big(\log_2(2\,\mathrm{sen}^2\,x-\cos x)\big)}\,.$$
- **Esercizio:** Trovare il dominio della funzione $f(x)=\log_5(x(x-2))$.
- **Esercizio:** Trovare il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[4]{\log^2_{1/2}x+\log_{1/2}x-2}$. *(Sol.:* $(0,1/2]\cup[4,+\infty)$*).*
- **Esercizio:** Dire se la funzione $f\ :\ \left[-2\,,\,\frac{\pi}{2}\right)\ \to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } -2\le x<0\\ 1-\mathrm{tg}\,x & \text{se } \ 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\,,\end{cases}$$
è iniettiva e/o suriettiva. Se non è suriettiva, cercare di restringerne appropriatamente il codominio in modo da renderla suriettiva. Se non è iniettiva, cercare di restringerne il dominio in modo da renderla iniettiva (ma senza modificare l'immagine). Dopo aver fatto ciò, si determini la funzione inversa.

Lunedì 15 ottobre 2012 *(2 ore - Lezione tenuta dal Prof. Orsina per un impegno del Prof. Dall'Aglio in una commissione di concorso)*

- **Maggioranti, minoranti, insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati.**
- **Esempi.**
- **Osservazione:** Un insieme E è limitato se e solo se esiste una costante M tale che $|x|\le M$ per ogni $x\in E$.
- **Massimo e minimo di un insieme.** Unicità del massimo e del minimo.
- **Osservazione:** Massimo e minimo di un insieme, se esistono, si possono considerare come le "migliori" barriere destra e sinistra di un insieme)
- **Osservazione:** Non sempre un insieme limitato superiormente (inferiormente) ammette massimo (minimo).
- **Estremo superiore ed estremo inferiore.**
- **Teorema:** Esistenza dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore (proprietà di completezza di $\mathbb{R}$, s.d.)
- Esempi immediati.
- **Osservazione:** Se si lavora solo nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, non tutti gli insiemi limitati superiormente ammettono estremo superiore in $\mathbb{Q}$ (ovviamente lo ammettono se li consideriamo come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$). E' questa una delle principali differenze tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Per esempio, l'insieme
$$E=\big\{x\in\mathbb{Q}\ :x\ge 0\,,\ x^2<2\big\}\,.$$
non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E=\Big\{x=\frac{n-1}{n}\,,\ n\in\mathbb{N}\Big\}\,.$$

Mercoledì 17 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E=\Big\{x=\frac{6n^2-5}{n^2}\,,\ n\in\mathbb{N}\Big\}\,.$$
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E=\Big\{x=(-1)^n\frac{6n^2-5}{n^2}\,,\ n\in\mathbb{N}\Big\}\,.$$
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E=\Big\{x=\frac{1}{m}-\frac{2}{n^2}\,,\ m,n\in\mathbb{N}\Big\}\,.$$

Giovedì 18 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Intorni** di un numero reale.
- **Distanza tra due numeri reali:** $d(x,y)=|x-y|$.
- **Punti di accumulazione (in $\mathbb{R}^*$) di un insieme di numeri reali. Punti isolati.** Esempi.
- **Proposizione:** In ogni intorno di un punto di accumulazione di E esistono infiniti punti di E.
- **Osservazione:** Un insieme **finito** (cioè costituito da un numero finito di punti) è privo di punti di accumulazione.

- **Teorema di Bolzano-Weierstrass** (s.d).
- Retta reale estesa $\mathbb{R}^*$. Intorni di $+\infty$ e $-\infty$.
- **Proprietà di una funzione verificate definitivamente per** $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$**.** Esempi.
- Definizione generale di **limite di una funzione** (con gli intorni), e suo significato.

Venerdì 19 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Come si scrive esplicitamente la definizione di limite a seconda che $x_0 \in R$, $x_0 = \pm\infty$, $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$ (inizio).
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, dove
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
- **Osservazione:** Il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non dipende dall'eventuale valore di $f(x_0)$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 25} \sqrt{x} = 5$.

Lunedì 22 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Come si scrive esplicitamente la definizione di limite a seconda che $x_0 \in R$, $x_0 = \pm\infty$, $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$ (conclusione).
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+5} = 0$.
- **Teorema:** Unicità del limite.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x+2} = 2$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to +\infty} (2x - x^3) = -\infty$.
- **Esempio:** Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.
- **Punti di accumulazione da destra e da sinistra. Limite destro e limite sinistro.**

Mercoledì 24 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Esempio:** $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- **Esempio:** $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- **Osservazione:** Se $x_0 \in \mathbb{R}$, e se x_0 è punto di accumulazione sia da destra che da sinistra per il dominio di f, si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$.
- **Esempio:** Il limite $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.
- **Esempio:** I limiti $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ non esistono.
- **Teorema della permanenza del segno** (e conseguenze).
- **Teorema (aritmetica dei limiti):** limite della somma, del prodotto, del rapporto di due funzioni, limite del prodotto di una funzione per una costante (dim. solo per la somma e il prodotto).
- **Esempio:** $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 7x + 5}{x^2 + x^4 - 7} = \frac{1}{13}$.

Giovedì 25 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Limiti di successioni.**
- **Esempio:** verificare che
$$\lim_{n\to +\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+5} = \frac{1}{2}.$$
- **Osservazione:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.
- **Osservazione:** Se $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{x\to x_0} |f(x) - l| = 0$.
- **Teorema dei carabinieri** (del confronto)
- **Esempio:**
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$
- **Funzioni infinitesime.**
- **Funzioni limitate superiormente, limitate inferiormente, limitate.**
- **Osservazione:** Il prodotto di una funzione infinitesima per una funzione definitivamente limitata è infinitesimo.
- **Esempio:** $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2 - 3\operatorname{sen}^3 x}{x^2+5} = 0$.

- **Teorema del confronto** quando il limite è infinito.
- **Esempio:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-5\operatorname{sen}^2 x\right)=+\infty\,.$$

- **Osservazione:** La somma di una funzione che tende a $+\infty$ e di una funzione definitivamente limitata inferiormente tende a $+\infty$.

Venerdì 26 ottobre 2012 *(4 ore)*

- **Definizione: limiti per eccesso o per difetto;** $\lim_{x\to x_0} f(x)=l^+$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=l^-$. Esempi vari.
- **Teorema (aritmetica estesa dei limiti):** limite della somma, del prodotto, del rapporto di due funzioni nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito, oppure il denominatore del rapporto sia infinitesimo. Somma di una funzione che tende a $+\infty$ e una funzione limitata inferiormente. Prodotto di un infinito e una funzione "definitivamente lontana da zero".
- **Esempio:**

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+5}{(x-1)^2}=+\infty\,.$$

$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{x^3-3x^2+5}{(x-1)^3}=\pm\infty\,.$$

- **Forme indeterminate:** $+\infty-\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \dfrac{0}{0}\,,\ \dfrac{\infty}{\infty}\,.$
- Esempi di risoluzione delle forme indeterminate:
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-7})$. *(Sol.: 0).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}(2x-x^3)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to-\infty}(5x^5-x^4+3x^2+2)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- Limiti per $x\to\pm\infty$ di polinomi.
- **Esercizio:** Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{3/2}-x^2\sqrt{1+x}-2x^3+\operatorname{sen} x)\,.$$

(Sol.: $-\infty$).

- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{x^2+x-1}$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{x^2+x-1}$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{x^3+x-1}$.
- Limiti per $x\to\pm\infty$ di rapporti di polinomi.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^6+2x^4}-x^3\right)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^6+2x^4}-2x^2\right)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^6+2x^4}-x^2\right)$. *(Sol.: $\dfrac{2}{3}$).*
- **Limiti di potenze** (s.d.).

Lunedì 29 ottobre 2012 *(2 ore)*

- **Limiti di esponenziali e logaritmi** (s.d.).
- **Proposizione:** $|\operatorname{sen} x|\le|x|$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to x_0}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x_0$ (continuità della funzione seno).
- $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$ (continuità della funzione coseno).
- Limiti della tangente.
- Limiti di arcoseno, arcocoseno, arcotangente (s.d.).
- **Teorema del limite di funzioni composte**.
- **Esempio:** Calcolare $\lim_{x\to0^+}2^{1/x}$.
- **Esempio:** Calcolare $\lim_{x\to0^-}2^{1/x}$.
- **Esempio:** Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty}2^{1/x}$.
- **Esempio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}\dfrac{\pi\ln^2 x+\ln x}{2\ln^2 x-5}$.
- **Osservazione:** Nel teorema sul limite delle funzioni composte è importante richiedere che la funzione "interna" tenda al limite senza assumere il valore limite, altrimenti il teorema è falso. **Esempio:** se $f(x)\equiv0$ e $g(y)=\begin{cases}y^2 & \text{se } y\neq0\\ 2 & \text{se } y=0\end{cases}$, allora

$$2=\lim_{x\to0}g(f(x))\neq\lim_{y\to0}g(y)=0\,.$$

- Limiti di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3+\sqrt{x}}{x+2+x^3}\right)^{-\log x}$ *(Sol.: 0).*

Mercoledì 31 ottobre 2012 *(2 ore)*

- Ancora sui limiti di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$.
- Forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+\sqrt{x}}{x+2+x^4}\right)^{-\log x}$ *(Sol.: $+\infty$).*
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.
- **Funzioni asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$.** In simboli: $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$. Esempi.
- **Notazione di Landau degli "o piccoli".** Cosa significa "$f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$". Esempi.
- **Osservazione:** Il limite sopra enunciato si può anche scrivere nella forma
$$\operatorname{sen} x \sim x \qquad \text{per } x \to 0,$$
oppure
$$\operatorname{sen} x = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0,$$
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}=1$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^3-1}{\operatorname{sen} x^5}$ *(Sol.: 0).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\cos^3\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ *(Sol.: $\frac{3}{2}$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$ *(Sol.: 1).*

Lunedì 5 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione.** Esempi.
- **Massimo (minimo) assoluto di una funzione, punto di massimo (minimo) assoluto di una funzione.**
- **Limiti di successioni.** Definizione e interpretazione grafica.
- **Successioni convergenti, divergenti, indeterminate.**
- **Osservazione:** Si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ se e solo se, per ogni intorno V di l, tutti i termini della successione, tranne al più un numero finito, appartengono a V.
- **Teorema:** Ogni successione convergente è limitata.
- **Osservazione:** Il viceversa è falso: esistono successioni limitate che non ammettono limite, per es. $a_n = (-1)^n$.
- **Teorema del limite di successioni monotòne**. Relazione tra limite ed estremi superiore e inferiore per successioni monotòne. Esempi.
- **Corollario:** Una successione crescente converge se e solo se è limitata superiormente.
- **Teorema del limite di funzioni monotòne** (s.d.). Relazione tra limite ed estremi superiore e inferiore per funzioni monotòne. Esempi.
- **Esercizio:** Determinare l'estremo superiore di $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
- **Esempio:** uso del teorema ponte per provare che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ non esiste.
- **Sottosuccessioni**.
- **Proposizione:** Se una successione ammette limite l, allora tutte le sue sottosuccessioni tendono a l.
- **Teorema (Bolzano-Weierstrass):** Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente. (s.d.)
- Esempi.
- **Teorema ponte tra limiti di successioni e limiti di funzioni** (s.d.).
- Applicazioni del teorema ponte. Uso del teorema ponte per dimostrare che alcuni limiti di funzione non esistono.
- **Esempio:** uso del teorema ponte per provare che $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen} x$ non esiste.

Mercoledì 7 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Esempio:** uso del teorema ponte per provare che $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ non esiste.
- **Disuguaglianza di Bernoulli**
$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,,$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x > -1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$
- **Limite notevole:** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{b^n}=0$ per ogni $b>1$.

- **Limite notevole:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{b^x} = 0$ per ogni $b > 1$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $b > 1$.
- **Infiniti di ordine superiore e inferiore. Infiniti dello stesso ordine.** Esempi.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0$ per ogni $a > 0$ $a \neq 1$, per ogni $b > 0$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log_a x|^c}{x^b} = 0$ per ogni $a > 0$ $a \neq 1$, per ogni $b > 0$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.
- **Schema riassuntivo degli infiniti di ordine superiore e inferiore, per $x \to +\infty$.**
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0^+} x^b |\log_a x|^c = 0$ per ogni $a > 0$ $a \neq 1$, per ogni $b > 0$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.
- **Fattoriale $n!$.**
- **Proposizione (Criterio del rapporto per successioni):** Se $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi, e se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora:
  1. Se $l \in [0, 1)$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;
  2. Se $l \in (1, +\infty]$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

  (la dimostrazione verrà data in seguito, quando si parlerà del criterio del rapporto per le serie).
- **Limite notevole:** $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ per ogni a.
- **Limite notevole:** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.
- **Formula di Stirling** per il fattoriale (s.d.).
- **Limite notevole:** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A} = 1$ per ogni $A > 0$.
- **Limite notevole:** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- **Limite notevole:** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$ se $P_k(n)$ è un polinomio in n.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$, usando la formula di Stirling.
- **Esercizio:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + 3 \operatorname{sen} x^4}{\sqrt{x+1} + (\log x^2)^{42}}$ *(Sol.: 1)*.

Giovedì 8 novembre 2012 *(2 ore)*

- Dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli, usando il **Principio d'induzione.**
- Altre dimostrazioni tramite il principio di induzione:
- **Somma di Gauss:**
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$
per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- **Esercizio per casa:** dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- **Esercizio per casa:** dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- **Esercizio:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x}$ *(Sol.: 1)*.
- **Esercizio:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{\ln^2 x}}{x^{\ln x} - (\ln x)^x}$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0^+} x^b |\log_a x| = 0$ per ogni $a > 0$ $a \neq 1$, per ogni $b > 0$.
- **Proposizione.** La successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata superiormente (s.d.).
- **Il numero $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.**
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x^2}$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4 - 3\log x}{2 - 5\log x}\right)^{e^{x+2}}$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4 - 3\log x}{2 - 3\log x}\right)^{e^{x+2}}$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e$, per ogni $a > 0, a \neq 1$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, per ogni $a > 0$.

Venerdì 9 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Limite notevole:** $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.
- **Limite notevole:** $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- **Esercizio:** usando il precedente limite notevole, calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^6 + 2x^4} - x^2\right)$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[8]{x^{16} + 2x^4} - x^2\right)$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^3 x} - 1}{x\left(\cos x - e^{x^2}\right)}$.
- **Principio di sostituzione degli infinitesimi/infiniti.**
- Casi in cui il precedente principio si può utilizzare (prodotti, rapporti), casi in cui il suo uso non è corretto (somme, composizioni di funzioni). Esempi.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{\operatorname{sen} x^5}}{1 - \cos\left(\ln(1+x^2)\right)}$.
- **Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + x^5}{x^3}$.

Nota: alcuni appunti sul principio di sostituzione sono disponibili sulla pagina web del corso.

Lunedì 12 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Infiniti e infinitesimi di ordine superiore e inferiore. Infiniti e infinitesimi dello stesso ordine.** Esempi.
- **Infiniti e infinitesimi di ordine α.** Esempi.
- **Esercizio:** trovare l'ordine di infinito di $5x^6 - x^4 + 1$ per $x \to +\infty$.
- **Esercizio:** trovare l'ordine di infinito di $\sqrt{x+1}$ per $x \to +\infty$.
- **Esercizio:** trovare l'ordine di infinitesimo di $x^2 + x^5$ per $x \to 0^+$.
- **Esercizio:** trovare l'ordine di infinito di $\operatorname{tg} x$ per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.
- **Osservazione:** esistono infiniti e infinitesimi che non sono di alcun ordine: ad esempio e^x per $x \to +\infty$, $\log x$ per $x \to +\infty$, $x \log x$ per $x \to +\infty$, $-\frac{1}{x \log x}$ per $x \to 0^+$.
- **Esercizio:** trovare l'ordine di infinitesimo di $\ln\left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$.
- **Esercizio:** trovare l'ordine di infinitesimo di $\sqrt[4]{x+7} - \sqrt[4]{x}$ per $x \to +\infty$.
- **Esercizio:** Calcolare l'ordine dei seguenti infinitesimi, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = e^{x^2-3x} - 1\,, \quad g(x) = \ln(2 - e^{x^3-5x^2})\,,$$

$$h(x) = \operatorname{tg}(1 - \cos x)\,, \quad k(x) = \sqrt{x^7 + x^5 + x^3}\,.$$

- **Esercizio:** Ordinare per $x \to +\infty$ i seguenti infinitesimi:

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + \sqrt{x}}\,, \qquad g(x) = \sqrt{9x^4+5} - 3x^2$$

$$h(x) = x^{1-\log x}\,, \qquad k(x) = \frac{1}{2\cos x + x^2 \log(2^x + 7)}\,.$$

- **Funzione continua in un punto. Funzione continua in un insieme.**

Mercoledì 14 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Funzione continua in un punto, continua da destra, continua da sinistra.**
- **Osservazione:** Tutte le funzioni potenza, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, il valore assoluto sono continue in ogni punto del loro dominio. N.B. anche $\frac{1}{x}$ è continua nel suo dominio.
- **Proposizione:** Combinazioni lineari, prodotto, rapporti e composizioni di funzioni continue sono continui, dove sono definiti. Esempi.
- **Classificazione dei punti di discontinuità. Punti di discontinuità eliminabile. Punti di discontinuità di salto (o di prima specie). Punti di discontinuità di seconda specie.**
- **Esempi: parte intera $[x]$, parte frazionaria $\{x\} = x - [x]$. Funzione segno.**

- **Esempio:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- **Esempi: parte intera $[x]$, parte frazionaria $\{x\} = x - [x]$. Funzione segno.**
- **Esempio:**

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- **Esempio:**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- **Esempio** di una funzione che non è continua in **nessun** punto: la **funzione di Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- **Esercizio:** Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + b & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(4x-8)}{2b - bx} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

risulti continua in $\mathbb{R}$ (Soluzione: $b = -2$).

- **Teorema di esistenza degli zeri.**
- **Osservazione:** Il teorema non è più vero se la funzione non è continua, oppure se l'insieme di definizione non è un intervallo.
- **Applicazione:** Mostrare che il polinomio $x^6 - x^3 + x^2 - 8$ ha almeno una radice compresa tra 0 e 2.
- **Corollario:** Una funzione f continua in $[a, b]$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$.
- **Corollario:** Una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori compresi tra il suo inf e il suo *sup*.
- **Osservazione:** L'immagine di una funzione continua in un intervallo è un intervallo.
- **Esempio:** La funzione x^2 è suriettiva da $[0, +\infty)$ a $[0, +\infty)$.
- **Esempio:** La funzione e^x è suriettiva da $\mathbb{R}$ a $(0, +\infty)$.
- **Esempio:** La funzione $\operatorname{sen} x$ è suriettiva da $\mathbb{R}$ a $[-1, 1]$.
- **Esempio:** La funzione $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è suriettiva.
- **Osservazione:** Un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno una radice reale.
- **Esercizio:** Dimostrare che l'equazione $3x^8 - 5x^7 + 4x^3 - 1 = 0$ ammette almeno due soluzioni reali.

Giovedì 15 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Corollario:** Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = g(c)$.
- **Esercizio:** Trovare per quali valori $a \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$1 - 2^{-x} = \frac{a}{x}$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $(2, +\infty)$.

- **Esercizio :** Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}.$$

- **Osservazione:** In generale, non si può dire che l'inversa di una funzione continua è continua e invertibile. Ad esempio, l'inversa della funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

non è continua. Tuttavia vale il seguente teorema.

- **Teorema:** Se f è continua e invertibile in un intervallo I, allora la sua funzione inversa è continua. (s.d.)
- **Applicazione:** le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio: $\log_a x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.
- **Osservazione:** In generale, non si può dire che una funzione invertibile è strettamente monotòna. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è invertibile ma non monotòna. Tuttavia vale il seguente teorema.

- **Teorema:** Se f è continua e invertibile in un intervallo I, allora è strettamente monotòna.

Venerdì 16 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Massimo e minimo assoluti di una funzione. Punti di massimo e minimo assoluti.**
- **Teorema di Weierstrass:** una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluti.
- **Osservazione:** Il teorema di Weierstrass risulta falso se f non è continua, o se l'intervallo non è chiuso e limitato. Esempi.
- **Introduzione** al concetto di derivata. Velocità di un punto in movimento.
- **Rapporto incrementale. Funzione derivabile in un punto. Derivata di una funzione in un punto.**

- Interpretazione cinematica della derivata: velocità.
- Esempi.
- Interpretazione geometrica della derivata: coefficiente angolare della retta tangente al grafico. Definizione di **retta tangente.**
- **Teorema:** f è derivabile in un punto se e solo se il suo grafico ammette retta tangente in quel punto.
- Esempi.
- **Funzione derivabile in un intervallo. Funzione derivata.**
- **Teorema:** Una funzione derivabile in un punto è anche continua in tale punto.
- Viceversa, una funzione può essere continua senza essere derivabile. Esempio: $f(x) = |x|$ non è derivabile in 0.
- **Derivata destra, derivata sinistra. Punto angoloso.**

Lunedì 19 novembre 2012 *(2 ore)*

- Derivate delle seguenti funzioni elementari: costante; x^n ($n \in \mathbb{N}$); x^a ($a \in \mathbb{Z}$, poi $\mathbb{Q}$, poi $\mathbb{R}$)
- **Cuspide. Flesso a tangente verticale.** Esempi.
- **Teorema:** Derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di funzioni derivabili.
- Esempi.
- Derivata delle seguenti funzioni elementari: $\operatorname{sen} x$; $\cos x$; e^x; a^x; $\ln x$; $\log_a x$, $\operatorname{tg} x$.
- **Teorema: Derivata di una funzione composta.** (s.d., ma con giustificazione della formula).
- Esempi vari.

Mercoledì 21 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema della derivata della funzione inversa** (s.d., solo prova della formula una volta che si sappia che f^{-1} è derivabile).
- **Applicazioni: derivata del logaritmo, della radice quadrata, dell'arcoseno, dell'arcocoseno, dell'arcotangente.**
- **Caso particolare** del Teorema della derivata della funzione inversa: se $f : I \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente, e x_0 è un punto tale che $f'(x_0) = 0$, allora, posto $y_0 = f(x_0)$, f^{-1} non è derivabile in y_0, essendo $Df^{-1}(y_0) = +\infty$ (s.d.).
- **Applicazione:** non derivabilità delle funzioni $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$ nei punti $x = \pm 1$.
- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = x\sqrt{|x^2 - x|} + |x - 3| \operatorname{sen} x$.
- **Teorema:** Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b). Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(a)$ e vale l. Analogo risultato si ha per la derivata sinistra *(la dimostrazione verrà fatta in seguito).*
- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{4/3}$.
- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = (\operatorname{sen}(x^4))^{1/3}$.
- **Punti di massimo e di minimo relativo (locale). Punti di massimo e di minimo relativo stretto (forte).**
- **Teorema di Fermat** sui punti estremali (cioè: di massimo o di minimo relativo) interni di una funzione derivabile.

Giovedì 22 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Osservazione:** per il teorema di Fermat, i punti di massimo e minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato (che esistono per il teorema di Weierstrass) vanno cercati tra i seguenti:
  1. i punti critici interni;
  2. gli estremi dell'intervallo;
  3. i punti di non derivabilità.
- **Esercizio:** Trovare massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x - \frac{1}{2} \right|$$
nell'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, 1 \right]$.
- **Esercizio:** Trovare gli estremi superiore e inferiore della stessa funzione nell'intervallo $\left(-\frac{3}{4}, 1 \right)$.
- **Esercizio:** Dato il grafico di una funzione f, disegnare il grafico di f'.
- **Esercizio:** Calcolare la derivata della funzione x^x.
- **Esercizio:** Calcolare la derivata della funzione $f(x)^{g(x)}$, se f e g sono derivabili (con $f(x) > 0$).
- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x + \frac{1}{2} \right|$.

- **Esercizio :** Stabilire se la funzione $f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{|x|+1} + 2x$ è invertibile nel suo dominio, e in caso affermativo calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = 1 + \operatorname{sen}\frac{1}{3}$.

- **Proposizione:** Se $f(x)$ è una funzione derivabile pari, allora $f'(x)$ è dispari. Se $f(x)$ è una funzione derivabile dispari, allora $f'(x)$ è pari.

- **Osservazione:** nella scorsa lezione abbiamo visto il seguente

  Teorema: Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b)$ e derivabile in (a,b). Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(a)$ e vale l.

  Tuttavia se $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ non esiste, non si può concludere nulla su $f'_+(a)$, come mostra il seguente

- **Esempio:** La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

  è derivabile in $x = 0$, tuttavia non esistono $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$.

Venerdì 23 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema di Rolle** e suo significato geometrico.
- **Teorema di Lagrange** e suo significato geometrico.
- **Teorema di Cauchy.**
- **Criterio necessario e sufficiente di monotonia.**
- **Criterio sufficiente di stretta monotonia.**
- **Condizione necessaria e sufficiente per la stretta monotonia di una funzione** (come riportato nel testo [2]).
- **Esercizio:** Verificare che la funzione $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.
- **Esercizio:** Studio degli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x) = x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}}$.
- **Corollario:** Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla.

Lunedì 26 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema di Cauchy.**
- **Esercizio:** provare che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$, e che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ per ogni $x < 0$.
- **Esercizio:** provare che $\ln x \leq x - 1$ per ogni $x > 0$.
- **Dimostrazione** del seguente Teorema: Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b)$ e derivabile in (a,b). Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(a)$ e vale l. Analogo risultato si ha per la derivata sinistra.
- **Asintoti verticali. Asintoti orizzontali. Asintoti obliqui.** Esempi.
- Come si trova un asintoto obliquo.
- **Esercizio:** Dire se le seguenti funzioni ammettono asintoti obliqui:

$$f(x) = \sqrt{x^2+2}\,, \qquad g(x) = \sqrt{x^2+2x}\,,$$

$$h(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^{7/2}}\,, \qquad k(x) = \ln x\,.$$

- **Proposizione:** Supponiamo che la funzione $f(x)$ ammetta asintoto obliquo di equazione $y = mx+q$ per $x \to +\infty$. Allora, se esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, tale limite vale m. Questo fornisce un modo alternativo per trovare il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo *(dimostrazione da fare in seguito).*
- **Osservazione:** Tuttavia, anche se $f(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$, il $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ potrebbe non esistere. Esempio: $f(x) = x + \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$.
- **Derivata seconda. Derivate successive.** Esempi.

Mercoledì 28 novembre 2012 *(3 ore)*

- **Funzioni convesse, concave, strettamente convesse, strettamente concave.**
- **Esempi:** $f(x) = x^2$,
  $f(x) = ax^2 + bx + c$,
  $f(x) = ax + b$,
  $f(x) = |x|$,
  $f(x) = |x| + x^2$.
- **Osservazione:** una funzione è concava se e solo se la sua opposta è convessa.
- **Osservazione:** le uniche funzioni contemporaneamente concave e convesse sono le funzioni affini (polinomi di primo grado): $f(x) = ax + b$.

- **Osservazione:** una funzione convessa non è necessariamente derivabile ($f(x) = |x|$).

- **Teorema:** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione (strettamente) convessa in (a, b). Allora:

  1. f è continua in (a, b);
  2. per ogni $x \in (a, b)$ esistono finite $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, e si ha $f'_-(x) \le f'_+(x)$;
  3. le funzioni $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ sono (strettamente) crescenti.

  (s.d.)

- **Teorema:** Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

  1. f è (strettamente) convessa in (a, b);
  2. f' è (strettamente) crescente in (a, b);
  3. per ogni $x, x_0 \in (a, b)$, con $x \ne x_0$, si ha
  $$f(x) \ge (>) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

  (s.d.)

- **Corollario:** Se f è derivabile due volte in (a, b), allora
$$f \text{ è convessa in } (a, b) \Leftrightarrow f'' \ge 0 \text{ in } (a, b);$$
$$f \text{ è strettamente convessa in } (a, b) \Leftarrow f'' > 0 \text{ in } (a, b).$$

- **Punti di flesso. Flessi a tangente verticale.**

- **Proposizione:** Se una funzione è due volte derivabile in un punto di flesso x_0, allora $f''(x_0) = 0$.

- **Osservazione:** Tuttavia una funzione derivabile può non essere derivabile due volte in un punto di flesso. Esempi: $f(x) = x|x|$, $g(x) = x^{5/3}$.

- **Osservazione:** Anche se f è due volte derivabile, l'annullarsi della sua derivata seconda non è condizione sufficiente per avere un flesso. Esempio: $f(x) = x^4$.

- **Studi di funzioni.**

- **Esercizio:** Studio della funzione $f(x) = 3 - 2\sqrt{|x|}e^{1-|x|}$.

- **Esercizio:** Studiare la funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + \cos x}{|\operatorname{sen} x|}\right)$ (inizio).

Giovedì 29 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Funzioni iperboliche: seno iperbolico, coseno iperbolico.** Studio del loro grafico e delle loro proprietà qualitative.

- **Esercizio per casa:** Disegnare il grafico della funzione **tangente iperbolica** $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

- **Limite notevole:** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1\,.$

- **Limite notevole:** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$

- **Funzioni iperboliche inverse:** $\operatorname{settsh} x$ **e** $\operatorname{settch} x$**, loro grafici e derivate.**

- **Esercizio per casa:** Studiare la biettività della funzione tangente iperbolica $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ e dire come è fatto il grafico della sua inversa $\operatorname{setttgh} x$.

- **Esercizio:** Studiare la funzione $f(x) = \ln|3e^x - 2| - |x|$.

Venerdì 30 novembre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema di De L'Hôpital** (dimostrazione solo nel caso di forme indeterminate 0/0 nel caso $x \to x_0 \in \mathbb{R}$).

- **Esercizio:** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$ usando il Teorema di De L'Hôpital.

- **Esercizio:** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ usando il Teorema di De L'Hôpital.

- **Esercizio:** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ usando il Teorema di De L'Hôpital.

- **Osservazione:** Prima di usare il Teorema di De L'Hôpital, assicurarsi di avere davvero a che fare con una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- **Osservazione:** se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, non si può dire che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste. Esempio: $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $g(x) = x$, per $x \to +\infty$.

- **Esercizio:** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x + 5x^2)}{\sqrt{x+1}}$.

- **Esercizio:** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x}$.

- **Esercizio:** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{arctg}\left(3(x - x^2)\right)}{\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x}$.

- **Esercizio:** Trovare l'ordine di infinitesimo di $f(x) = \ln(1 + x) - x$ per $x \to 0$.

- **Esercizio:** Trovare l'ordine di infinitesimo di $f(x) = 1 - \cos x \operatorname{ch} x$ per $x \to 0$.
- **Esercizio:** Trovare l'ordine di infinitesimo di $f(x) = 3 \operatorname{tg} x - 3x - x^3$ per $x \to 0$.
- **Osservazione:** Il teorema di De L'Hôpital afferma che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ma in generale è falso che $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ siano asintoticamente equivalenti, oppure infiniti/infinitesimi dello stesso ordine.
- **Esempio:** Usando il teorema di De L'Hôpital, si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, tuttavia le funzioni $\frac{\log x}{x}$ e $\frac{1}{x}$ non sono dello stesso ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$.

Lunedì 3 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Osservazione:** Dal teorema di De L'Hôpital segue che, se la funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ per $x \to +\infty$, e se esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora tale limite vale m. Questo fornisce un ulteriore metodo per calcolare il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo.
- **Esercizio:** Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x - 2 + 2\cos x}{x \ln(1+x) - x^2}.$$
- **Polinomio di Taylor. Polinomio di MacLaurin.**
- **Osservazione:** il polinomio di Taylor generalizza il concetto di retta tangente, e in effetti per $n = 1$ è la retta tangente.
- Esempi vari di polinomi di Taylor.
- Calcolo dei **polinomi di MacLaurin di alcune funzioni elementari:** e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.
- **Osservazione:** Il polinomio di MacLaurin di una funzione pari è costituito da sole potenze pari. Il polinomio di MacLaurin di una funzione dispari è costituito da sole potenze dispari.
- **Teorema di Peano.**
- **Proposizione:** La derivata del polinomio di Taylor di grado n relativo alla funzione f è il polinomio di Taylor di grado $n-1$ relativo alla derivata f'.

Mercoledì 5 dicembre 2012 *(3 ore)*

- Esempi di sviluppi di Taylor con il resto nella forma di Peano.
- Uso dei polinomi di Taylor per il calcolo dei limiti.
- **Regole di calcolo per gli "o piccoli".**
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$, applicando il teorema di Peano.
- **Esercizio:** Trovare l'ordine di infinitesimo di $f(x) = 1 - \cos x \operatorname{ch} x$ per $x \to 0$.
- Uso di polinomi di Taylor già noti per trovare altri polinomi di Taylor, mediante sostituzione.
- **Esempio:** trovare il polinomio di MacLaurin di $\operatorname{sen} x^2$.
- **Altri sviluppi di MacLaurin:**
$f(x) = \operatorname{sh} x$
$f(x) = \operatorname{ch} x$
$f(x) = \frac{1}{1-x}$
$f(x) = \frac{1}{1+x}$
$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x - x^2)}{1 - e^{-x^2} - x^2}$.

Giovedì 6 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema:** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$, $n \geq 2$. Se
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$
allora:
  1. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0è un punto di minimo relativo per f;
  2. Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0è un punto di massimo relativo per f;
  3. Se n è dispari, x_0 non è né di massimo né di minimo relativo.
- **Coefficienti binomiali. Binomio di Newton (s.d.). Coefficienti binomiali generalizzati** $\binom{\alpha}{k}$.
- **Sviluppo di MacLaurin di** $f(x) = (1+x)^\alpha$.

- **Altri sviluppi di MacLaurin:**
  $f(x) = \ln(1+x)$
  $f(x) = \operatorname{arctg} x$
  $f(x) = \sqrt{1+x}$
  $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
  $f(x) = \operatorname{arcsen} x$
- **Esercizio:** Trovare lo sviluppo di MacLaurin di grado 5 di $\operatorname{tg} x$.
- **Esercizio:** Calcolare il polinomio di MacLaurin di 8° grado della funzione $f(x) = [x^2 - \log(1+x^2)]\sin^2 x$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \sqrt{x} - x}{5\log(1+x^2)}$.
- **Esercizio:** Deteminare l'ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) = e^{1/x^2} - \cos\dfrac{1}{x}$.

Venerdì 7 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Esercizio:** Calcolare
  $$\lim_{x\to+\infty} \left[x\log\left(\frac{1}{1+x}\right) + x\log x + 1 \right].$$
  A seconda del limite trovato calcolare l'eventuale ordine di infinito o di infinitesimo.
- **Formula del resto di Lagrange** (s.d.).
- **Osservazione:** Per $n = 0$ la formula del resto di Lagrange coincide con il Teorema di Lagrange.
- **Errore (o resto) di Taylor.**
- **Esercizio:** calcolare $\operatorname{sen} 1$ con un errore inferiore a 10^{-5}.
- **Esercizio:** calcolare e con un errore inferiore a 10^{-3}.
- **Esercizio:** calcolare $\sqrt{37}$ con un errore inferiore a 10^{-5}.
- **Suddivisione di un intervallo. Somma superiore e somma inferiore di una funzione, relative ad una suddivisione. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale di Riemann.** Significato geometrico dell'integrale.

Lunedì 10 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Teorema:** una funzione monotòna in $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
- **Teorema:** una funzione continua in $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ (s.d.).
- **Teorema:** una funzione limitata in $[a,b]$ che ha un numero finito di punti di discontinuità è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ (s.d.).
- **Esempio:** Calcolo di $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$.
- **Esercizio per casa:** Calcolo di $\displaystyle\int_0^b x\,dx$ e di $\displaystyle\int_0^b x^3\,dx$.
- **Teorema (proprietà dell'integrale):**
  1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$;
  2. Monotonia dell'integrale;
  3. Linearità dell'integrale;
  4. $(b-a)\inf\limits_{[a,b]} f \le \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup\limits_{[a,b]} f$;
  5. Additività rispetto all'intervallo di integrazione;
  6. Disuguaglianza triangolare.

  (dim. solo di 1, 2, 4)
- **Valore medio** di una funzione in un intervallo.
- **Teorema della media.**
- Definizione di $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ (con $a < b$) e di $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx$. Con questa definizione, l'additività rispetto all'intervallo di integrazione continua a valere per qualunque ordinamento degli estremi.
- Esempio di funzione limitata ma non integrabile secondo Riemann: la funzione di Dirichlet in $[0,1]$.
- **Funzione integrale di $f(x)$.**
- **Teorema fondamentale del calcolo integrale,** nell'ipotesi che f sia continua nell'intervallo $[a,b]$.
- **Funzioni primitive.**

Mercoledì 12 dicembre 2012 *(3,5 ore)*

- **Proposizione:** due primitive della medesima funzione in un intervallo differiscono per una costante.
- **Formula per il calcolo degli integrali di Riemann.**
- **Integrale definito, integrale indefinito, e loro relazioni.**
- **Tabella degli integrali indefiniti elementari.**
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \left((x-1)^3 + \operatorname{sen} x + \frac{3}{x}\right) dx$.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \cos(5x-1)\,dx$.

- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.
- **Integrazione per parti.** Formulazione per integrali indefiniti e per integrali definiti.
- $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\, dx$
- $\displaystyle\int x\, e^x\, dx$
- $\displaystyle\int \ln x\, dx$
- $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx$
- $\displaystyle\int x \ln^3 x\, dx$
- $\displaystyle\int \cos(3x)\, \cos(5x)\, dx$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$, svolto per parti.
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$, svolto per parti.
- $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx$, svolto per parti.
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ mediante integrazione per parti.
- **Esercizio:** Trovare una formula iterativa per il calcolo di $I_n(x) = \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ mediante integrazione per parti.
- **Esercizio per casa:** Trovare una formula iterativa per il calcolo di $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x\, dx$ mediante integrazione per parti.
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\, dx$ mediante integrazione per parti.

Giovedì 13 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Integrazioni di funzioni razionali fratte.**
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3+5}{x^2+x}\, dx$.
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-2x}\, dx$.
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\,(x-1)}$.
- **Esempio:** come si integra $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{(x-1)^3(3x+2)^4(x-5)}\, dx$, dove $P_n(x)$ è un generico polinomio.
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+1}\, dx$.
- **Esercizio importante:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.
- **Esercizio:** Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$
- **Esercizio:** Posto $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, provare che
$$I_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1}(x)\,.$$
- **Esercizio riassuntivo per l'integrazione delle funzioni razionali:**
$$\int \frac{P_n(x)}{(3x+1)(x-2)^3(x^2+5x+10)(x^2+x+1)^3}\, dx\,,$$
dove $P_n(x)$ è un polinomio.

Venerdì 14 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Integrazione per sostituzione.** Esempi.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \operatorname{sen}^9 x\, dx$
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \frac{x^5}{4+x^6}\, dx$.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^6}\, dx$.
- **Osservazione:** integrali della forma $\displaystyle\int f(ax+b)\, dx$.
- **Esercizio:** calcolare $\displaystyle\int \cos(3x-2)\, dx$.
- **Formula di integrazione per sostituzione per integrali definiti.**
- $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{(\ln x+1)\, x}\, dx$

- Alcune **sostituzioni particolari** che permettono di ricondurre degli integrali di certe classi di funzioni a quello di **funzioni razionali**. In tutto quel che segue denotiamo con R una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi.

- Integrali del tipo
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx, \quad \text{si pone } t=\sqrt[n]{ax+b}.$$
Esempio:
$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$
Esempio:
$$\int \frac{2+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$$
(sost. $t=\sqrt[6]{x+1}$).

- Integrali del tipo
$$\int R(e^x)\,dx, \quad \text{si pone } e^x=t.$$
Esempi:
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{e^x+1}.$$

- Integrali del tipo
$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx, \quad \text{si pone } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$
Esempio:
$$\int \frac{1+\cos x}{4\sin x-3\cos x}\,dx.$$

- Integrali del tipo
$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx, \quad \text{si pone } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

- Se però l'integrando è del tipo
$$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx,$$
$$\text{si pone } t=\operatorname{tg} x.$$
Esempi:
$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{8\cos^3 x+\sin^3 x}\,dx.$$
Osservazione: Attenzione, il seguente calcolo è errato (perché?):
$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^0\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=0\,,$$
in quanto sappiamo che il primo integrale vale $\dfrac{\pi}{2}$.
Esercizio: Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{8\cos^3 x+\sin^3 x}\,dx.$$
Si osservi che $t=\operatorname{tg} x$ non è ben definito quando $x=\pi/2$. Tuttavia quando $x\to(\pi/2)^-$ si ha $t\to+\infty$, quindi l'integrale diventa
$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{8+t^3}:=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{dt}{8+t^3}\,.$$

Lunedì 17 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Numeri complessi $\mathbb{C}$. Parte reale. Parte immaginaria.**
- Rappresentazione dei numeri complessi, operazioni tra numeri complessi. Esempi.
- **Modulo di un numero complesso. Numeri complessi coniugati.** Esempi.
- **Proprietà del modulo e del coniugato.**
- **Notazione trigonometrica di un numero complesso. Argomento. Notazione esponenziale (notazione di Eulero $e^{i\theta}$).** Esercizi di trasformazione di un numero complesso in notazione trigonometrica.
- **Esempio:** scrivere $z=i\,,\ z=1+i\,,\ z=3+4i\,,\ z=3-4i$ in notazione trigonometrica.
- **Prodotto di numeri complessi** in notazione trigonometrica. Significato geometrico.
- **Rapporto di due numeri complessi** in rappresentazione trigonometrica.
- **Potenze di un numero complesso. Formula di De Moivre.**
- **Esercizio:** Calcolare $\dfrac{(1-i)^{11}}{(1+i)^7}$.

Mercoledì 19 dicembre 2012 *(3 ore)*

- Integrali del tipo
$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a>0$$
$$\text{si pone } \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t.$$
Esempi:
$$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}\,dx, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

- **Osservazione:** nel primo dei due integrali soprastanti, era possibile fare anche la sostituzione $x=\sqrt{2}\,\operatorname{sh} t$.

- Integrali del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx, \quad a<0$$

$$\text{si pone } \sqrt{\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2 - x}} = t,$$

con $\lambda_1 < \lambda_2$ radici del polinomio ax^2+bx+c.

Esempio:

$$\int \frac{dx}{4-5\sqrt{1-x^2}}.$$

- Caso particolare:

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\, dx, \quad \text{si può porre anche}$$

$$x = a \sin t, \ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},$$

o equivalentemente $x = a \cos t$ con $0 \le t \le \pi$.

Esempi:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx, \qquad \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{1-x^2}\, dx.$$

- **Osservazione:** ci sono numerose funzioni le cui primitive non si possono scrivere in termini di funzioni elementari. Ad esempio e^{x^2}, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$.
- **Calcolo di aree.**
- Aree di insiemi della forma

$$E = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b\,, \ f(x) \le y \le g(x) \Big\}\,.$$

Esempi.

- **Esercizio:** calcolare l'area del cerchio.
- **Esercizio:** Calcolare l'area della regione di piano, contenuta nel primo quadrante del piano cartesiano, delimitata dall'asse delle x, dalla circonferenza $x^2+y^2=4$ e dalla parabola $y=x^2$.

- **Radici n-esime di un numero complesso** e loro rappresentazione geometrica.
- **Esempio:** soluzioni dell'equazione $z^4 = -16$.
- **Teorema fondamentale dell'algebra** (s.d.). Conseguenze.
- **Osservazione:** Nei numeri reali il teorema non vale!
- **Corollario:** Scomposizione di polinomi reali.
- **Esercizio:** Risolvere l'equazione

$$z|z|^2 + |z|\bar{z}^2 - \bar{z}z^2 = i\,.$$

- Altri esercizi.

Giovedì 20 dicembre 2012 *(2 ore)*

- **Serie. Somma ridotta parziale di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Somma di una serie.**
- **Serie geometrica**: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge per $|q|<1$, e la sua somma vale $\frac{1}{1-q}$. Diverge per $q \ge 1$, è indeterminata per $q \le -1$.
- **Serie armonica:** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. (s.d.)
- **Osservazione:** Il carattere di una serie (cioè il fatto che converga, diverga o sia indeterminata) non cambia se si modifica un numero finito di termini della serie.
- **Teorema:** Condizione necessaria affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga è che $a_n \to 0$.
- **Osservazione:** Come mostra la serie armonica, non è condizione sufficiente.
- **Serie di Mengoli:** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, in quanto $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, pertanto la sua ridotta n-esima vale $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Le serie di questo tipo, ossia della forma $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$, si chiamano **serie telescopiche**, e convergono (con somma $b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$) se e solo se la successione $\{b_n\}$ converge.
- **Teorema:** Una serie a termini non negativi è sempre convergente o divergente. Converge se e solo se la successione delle ridotte n-esime è limitata superiormente.
- **Teorema (Criterio del confronto):** Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie tali che $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (in realtà basta per ogni n maggiore di un fissato n_0). Allora valgono le implicazioni:
  1. $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ convergente;
  2. $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum b_n$ divergente.
- **Esempio:** La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha \le 1$, è divergente, in quanto $\frac{1}{n^\alpha} \ge \frac{1}{n}$, e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
- Esercizi vari.

- **Teorema (Criterio del confronto asintotico):** Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi tali che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L\,.$$
Allora:
  1. Se $L\in(0,+\infty)$ (in particolare se $a_n\sim b_n$), allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere (cioè sono entrambi convergenti o divergenti);
  2. Se $L=0$, allora
     - ◇ $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ convergente,
     - ◇ $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum b_n$ divergente;
  3. Se $L=+\infty$, allora
     - ◇ $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum b_n$ convergente,
     - ◇ $\sum b_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ divergente.
- **Esempio:** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico con la serie di Mengoli.
- **Esempio:** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha>2$, è convergente, per il criterio del confronto asintotico con la serie precedente.
- **Serie armonica generalizzata:** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha>1$, diverge per $\alpha\le 1$. (s.d. il caso mancante $\alpha<2$).

Venerdì 21 dicembre 2012 *(4 ore)*

- **Esercizio:** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{5}{n^2\ln n}$ converge.
- **Esercizio:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ converge.
- **Esercizio:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[4]{n^8-5n^7}-n^2\right)^\alpha$, al variare del parametro reale α.
- **Osservazione:** talvolta può essere utile utilizzare la formula di Taylor per studiare la convergenza delle serie. Esempio: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n})$ converge, perchè $(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n})\sim\frac{1}{6n^3}$.
- **Esercizio:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n})^\alpha$.
- **Teorema (Criterio del rapporto):** Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esista
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\,.$$
Allora:
  - Se $L\in(1,+\infty]$, allora $a_n\to+\infty$, e di conseguenza la serie diverge;
  - Se $L\in[0,1)$ la serie converge.
- **Esempio:** Le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ converge per il criterio del rapporto. Si può dimostrare che la sua somma vale e. Più in generale la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge per ogni $x\in\mathbb{R}$, la sua somma vale e^x.
- **Osservazione:** Nel caso in cui $L=1$, non si può dire nulla. Purtroppo tutti i casi un cui a_n crescita dell'ordine di una potenza (positiva o negativa) di n, si trova $L=1$, quindi il criterio non può essere applicato.
- **Teorema (Criterio della radice)** Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che esista
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L\,.$$
Allora:
  - Se $L\in(1,+\infty]$ la serie diverge;
  - Se $L\in[0,1)$ la serie converge.
- **Osservazione:** Anche in questo caso, se $L=1$ non si può dire nulla.
- Esercizi vari, anche su serie dipendenti da parametri.
- **Serie a termini di segno alterno.**
- **Teorema (Criterio di Leibniz):** Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ una serie a termini di segno alterno. Se $\{a_n\}$ è:
  - infinitesima;
  - strettamente decrescente (almeno definitivamente),

  allora la serie converge (s.d.).
- **Esempio:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge.
- **Esempio:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.
- **Esempio:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2-1}{n^3+n}$ converge.

- **Esempio:** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^2-1}{n^3+5n-3\cos n}$ converge.
- **Osservazione:** Il teorema è falso se si toglie l'ipotesi di decrescenza.
- **Osservazione:** Per vedere che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, si può prendere una funzione $f(x)$ tale che $f(n)=a_n$, e provare che $f'(x)<0$ definitivamente per $x\to+\infty$.
- **Osservazione:** Per vedere che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, è sbagliato studiare la decrescenza di una successione asintoticamente equivalente ad $\{a_n\}$. Infatti si possono costruire facilmente coppie di successioni asintoticamente equivalenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che una sia definitivamente decrescente e l'altra no.
- **Osservazione:** Attenzione a riconoscere le serie a termini di segno alterno: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1+2\operatorname{sen} n}{n^2}$ non lo è.
- **Serie a termini di segno qualsiasi.**
- **Convergenza assoluta** di una serie.
- **Teorema (criterio della convergenza assoluta):** Se una serie converge assolutamente, allora converge. Inoltre vale la disuguaglianza triangolare

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$$

(s.d.)

- **Osservazione:** Il viceversa non è vero. Controesempio: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$
- **Esempio:** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} n^2}{n^3-n^2}$ converge assolutamente.
- **Teorema (Criterio del rapporto per serie a segni qualsiasi):** Sia $\sum_n a_n$ una serie. Supponiamo che esista

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L\,.$$

Allora:

  - Se $L\in[0,1)$ la serie converge (assolutamente);
  - Se $L\in(1,+\infty]$ la serie non converge.

- **Teorema (Criterio della radice per serie a segni qualsiasi):** Sia $\sum_n a_n$ una serie. Supponiamo che esista

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L\,.$$

Allora:

  - Se $L\in[0,1)$ la serie converge (assolutamente);
  - Se $L\in(1,+\infty]$ la serie non converge.

- Esercizi vari.
- **Serie di potenze.**
- **Teorema** : Data una serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k$, esiste ed è unico $r\in[0,+\infty]$ (detto **raggio di convergenza**) tale che:

  1. la serie converge assolutamente $\forall\ x\in\mathbb{R}$ tale che $|x-x_0|<r$;
  2. la serie di potenze non converge $\forall\ x\in\mathbb{R}$ tale che $|x-x_0|>r$.

  (s.d.)

- **Osservazione**: se $r\in(0,+\infty)$, il Teorema precedente non fornisce alcuna informazione quando $|x-x_0|=r \Leftrightarrow x-x_0=\pm r$. Questo caso va considerato separatamente caso per caso.
- **Esempi**:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k,\quad \text{(serie geometrica)},\quad \text{e}\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

- **Teorema 5.16** (con dimostrazione), come determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze (con il criterio del rapporto o della radice).
- **Esempi vari.**
- **Esercizio:** Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{x^n}\,,\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\,.$$

- Sia $f\in C^\infty((a,b))$ (cioè f ha derivata di ogni ordine in (a,b)), allora se $x_0\in(a,b) \Rightarrow$ esiste $T_n[f,x_0]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.
  Naturale introdurre la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

- $f\in C^\infty((a,b))$ e $x\in(a,b)$ allora f **è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 nel punto** x, cioè

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x),$$

se e solo se $R_n(x)=f(x)-T_n(x)\to 0$ quando $n\to+\infty$.

- $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k=f(x)$ significa: 1) La serie converge in x; 2) la somma vale $f(x)$.

- **Sviluppi in serie di Taylor di funzioni elementari** (dim. solo della prima):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \forall\ x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad \forall\ x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \forall\ x \in (-1,1).$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) x^k, \quad \forall\ x \in (-1,1)\,.$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \forall\ x \in (-1,1).$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: *Analisi Matematica*, McGraw-Hill (seconda edizione).

[2] P. Marcellini, C. Sbordone: *Analisi Matematica uno*, Liguori editore.