ANALISI MATEMATICA I

per Ingegneria Aerospaziale - A.A. 2013-2014

– Diario delle lezioni –

Questo è un indice degli argomenti trattati a lezione, che ha anche funzione di programma del corso. Prego gli studenti di segnalarmi eventuali errori. Le date in cui sono stati affrontati i vari argomenti sono indicative. I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati. Tutti gli argomenti possono essere studiati sul libro di testo [1] (oppure su [2]), eccetto dove indicato. Questo diario delle lezioni è curato dal docente Andrea Dall'Aglio.

Lunedì 30 settembre 2013 *(2 ore)*

- Presentazione del corso di Analisi Matematica I.
- Cenni sui **numeri naturali, interi relativi, razionali** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
- **Definizione assiomatica dei numeri reali. Proprietà delle operazioni, dell'ordinamento. Assioma di completezza.** (vedere [2])

Martedì 1 ottobre 2013 *(2 ore)*

- **Maggioranti, minoranti di un insieme di numeri reali. Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati.**
- **Esempi di insiemi limitati e non limitati:**

$$E_1 = \Big\{1, 2, 5, 8\Big\}.$$

$$E_2 = \mathbb{N}.$$

$$E_3 = \mathbb{Z}.$$

$$E_4 = (0, 1).$$

$$E_5 = [0, 1).$$

$$E_6 = \Big\{x = \frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

$$E_7 = \Big\{x = \frac{5}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

$$E_8 = \Big\{x = n^3 - 3n \ : \ n = 1, 2, \dots\Big\}.$$

- **Massimo e minimo di un insieme.** Unicità del massimo e del minimo.
- **Osservazione:** Non sempre un insieme limitato superiormente (inferiormente) ammette massimo (minimo).
- **Estremo superiore ed estremo inferiore.**
- **Osservazione:** Se un insieme ammette massimo (minimo), questo è anche estremo superiore (inferiore).
- **Teorema:** Esistenza (e unicità) dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore
- **Osservazione importante:** Caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.
- Applicazione agli esempi precedenti.

Mercoledì 2 ottobre 2013 *(2 ore)*

- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E = \big\{x = \frac{6n^2 - 5}{n^2}, \ n \in \mathbb{N}\big\}.$$
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E = \big\{x = (-1)^n \frac{6n^2 - 5}{n^2}, \ n \in \mathbb{N}\big\}.$$
- **Esercizio:** Trovare estremo superiore e inferiore dell'insieme
$$E = \big\{x = \frac{1}{m} - \frac{2}{n^2}, \ m, n \in \mathbb{N}\big\}.$$
- **Intorni** di un numero reale.
- Retta reale estesa $\mathbb{R}^*$. Intorni di $+\infty$ e $-\infty$.
- **Punti di accumulazione (in $\mathbb{R}^*$) di un insieme di numeri reali.** Esempi.

Giovedì 3 ottobre 2013 *(2 ore)*

- **Osservazione:** Se si lavora solo nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, non tutti gli insiemi limitati superiormente ammettono estremo superiore in $\mathbb{Q}$ (ovviamente lo ammettono se li consideriamo come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$). E' questa una delle principali differenze tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Per esempio, l'insieme
$$E = \big\{x \in \mathbb{Q} \ : x \geq 0, \ x^2 < 2\big\}.$$
non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.
- Punti di accumulazione: trovare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi:

$$E_1 = \Big\{1, 2, 5, 8\Big\}.$$

$$E_2 = \mathbb{N}.$$

$$E_3 = \mathbb{Z}.$$

$$E_4 = (0, 1).$$

$$E_5 = [0, 1].$$

$$E_6 = \Big\{x = \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

$$E_7 = \mathbb{Q}$$

- **Punti isolati** di un insieme.
- **Proposizione:** In ogni intorno di un punto di accumulazione di E esistono infiniti punti di E.
- **Osservazione:** Un insieme **finito** (cioè costituito da un numero finito di punti) è privo di punti di accumulazione.
- **Teorema di Bolzano-Weierstrass** (s.d).
- **Proprietà di una funzione verificate definitivamente per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$.** Esempi.
- Definizione generale di **limite di una funzione** (con gli intorni), e suo significato.

Lunedì 7 ottobre 2013 *(2 ore)*

- Come si scrive esplicitamente la definizione di limite a seconda che $x_0 \in R$, $x_0 = \pm\infty$, $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$ (inizio).
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, dove
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
- **Osservazione:** Il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non dipende dall'eventuale valore di $f(x_0)$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 25} \sqrt{x} = 5$.

Martedì 8 ottobre 2013 *(2 ore)*

- Come si scrive esplicitamente la definizione di limite a seconda che $x_0 \in R$, $x_0 = \pm\infty$, $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$ (conclusione).
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+5} = 0$.
- **Osservazione:** Dati due elementi diversi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, esistono un intorno I_1 di x_1 e un intorno I_2 di x_2 tra loro disgiunti.
- **Osservazione:** L'intersezione di due intorni di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è ancora un intorno di x_0.
- **Teorema:** Unicità del limite.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x+2} = 2$.
- **Esercizio:** verificare che $\lim_{x\to +\infty} (2x - x^3) = -\infty$.
- **Esempio:** Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.
- **Punti di accumulazione da destra e da sinistra. Limite destro e limite sinistro.**
- **Esempio:** $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- **Esempio:** $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- **Osservazione:** Se $x_0 \in \mathbb{R}$, e se x_0 è punto di accumulazione sia da destra che da sinistra per il dominio di f, si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ (dim. per esercizio).
- **Esempio:** Il limite $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.
- **Esempio:** Il limite $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} x$ non esiste.
- **Esempio:** Il limite $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non esiste.

Mercoledì 9 ottobre 2013 *(2 ore)*

- **Teorema della permanenza del segno** (e conseguenze).
- **Teorema (aritmetica dei limiti):** limite della somma, del prodotto, del rapporto di due funzioni, limite del prodotto di una funzione per una costante (dim. solo per la somma e il prodotto).
- **Esempio:** $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 7x + 5}{x^2 + x^4 - 7} = \frac{1}{13}$.
- **Osservazione:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.
- **Osservazione:** Se $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{x\to x_0} |f(x) - l| = 0$.
- **Teorema dei carabinieri** (del confronto)
- **Esempio:**
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 .$$
- **Esempio:**
$$\lim_{x\to +\infty} x\,(3 + \operatorname{sen} x) = +\infty .$$

Giovedì 10 ottobre 2013 *(2 ore)*

- **Funzioni limitate superiormente, limitate inferiormente, limitate.**
- **Osservazione:** Il prodotto di una funzione infinitesima per una funzione definitivamente limitata è infinitesimo.
- **Esempio:** $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos^4 x - 3\,\mathrm{sen}^3 x}{x^2+5} = 0\,.$
- **Teorema del confronto** quando il limite è infinito.
- **Esempio:**
$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - 5\,\mathrm{sen}^2 x\right) = +\infty\,.$$
- **Osservazione:** La somma di una funzione che tende a $+\infty$ e di una funzione definitivamente limitata inferiormente tende a $+\infty$.
- **Definizione: limiti per eccesso o per difetto;** $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^+$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^-$. Esempi vari.
- **Teorema (aritmetica estesa dei limiti):** limite della somma, del prodotto, del rapporto di due funzioni nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito, oppure il denominatore del rapporto sia infinitesimo. Somma di una funzione che tende a $+\infty$ e una funzione limitata inferiormente. Prodotto di un infinito e una funzione "definitivamente lontana da zero".
- **Esempio:**
$$\lim_{x\to1} \frac{x^3-3x^2+5}{(x-1)^2} = +\infty\,.$$
$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^3-3x^2+5}{(x-1)^3} = \pm\infty\,.$$
$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^3-3x^2+5}{x^2-4x+3} = \mp\infty\,.$$
- **Forme indeterminate:** $+\infty-\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,.$
- Esempio di risoluzione delle forme indeterminate:
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-7})$. *(Sol.: 0).*

Lunedì 14 ottobre 2013 *(2 ore)*

- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} (2x - x^3)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to-\infty} (5x^5 - x^4 + 3x^2 + 2)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- Limiti per $x \to \pm\infty$ di polinomi.
- **Esercizio:** Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} (x^{3/2} - x^2\sqrt{1+x} - 2x^3 + \mathrm{sen}\, x)\,.$$
(Sol.: $-\infty$).
- **Esercizio:** Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,.$$
(Sol.: 1).
- **Esercizio:** Calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,.$$
(Sol.: -1).
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-1}$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2x+5}{x^2+x-1}$.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+5}{x^3+x-1}$.
- Limiti per $x \to \pm\infty$ di rapporti di polinomi.
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^6+2x^4} - x^3\right)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^6+2x^4} - 2x^2\right)$. *(Sol.: $-\infty$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^6+2x^4} - x^2\right)$. *(Sol.: $\frac{2}{3}$).*
- **Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^9+x^8} - x^3\right)$. *(Sol.: $+\infty$).*
- **Limiti di potenze** (s.d.).

Martedì 15 ottobre 2013 *(2 ore)*

-

Mercoledì 16 ottobre 2013 *(2 ore)*

-

Giovedì 17 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Lunedì 21 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Martedì 22 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Mercoledì 23 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Giovedì 24 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Lunedì 28 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Martedì 29 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Mercoledì 30 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Giovedì 31 ottobre 2013 *(2 ore)*

•

Lunedì 4 novembre 2013 *(2 ore)*

•

Martedì 5 novembre 2013 *(2 ore)*

- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{1/3}$.
- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{4/3}$.
- **Esercizio:** Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = (\operatorname{sen}(x^4))^{1/3}$.
- **Teorema:** Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b). Se esiste $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(a)$ e vale l. Analogo risultato si ha per la derivata sinistra *(la dimostrazione verrà fatta in seguito)*.
- **Proposizione:** Se $f(x)$ è una funzione derivabile pari, allora $f'(x)$ è dispari. Se $f(x)$ è una funzione derivabile dispari, allora $f'(x)$ è pari.
- **Punti di massimo e di minimo relativo (locale). Punti di massimo e di minimo relativo stretto (forte).**
- **Punti critici (o stazionari).**
- **Teorema di Fermat** sui punti estremali (cioè: di massimo o di minimo relativo) interni di una funzione derivabile.
- **Variante del Teorema di Fermat:** cosa succede se il punto di massimo o minimo relativo si trova ad uno degli estremi dell'intervallo.
- **Osservazione:** per il teorema di Fermat, i punti di massimo e minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato (che esistono per il teorema di Weierstrass) vanno cercati tra i seguenti:
  1. i punti critici interni;
  2. gli estremi dell'intervallo;
  3. i punti di non derivabilità.
- **Esercizio:** Trovare massimo e minimo assoluti della funzione
  $$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x - \frac{1}{2} \right|$$
  nell'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, 1 \right]$ (inizio).

Mercoledì 6 novembre 2013 *(2 ore)*

- **Esercizio:** Trovare massimo e minimo assoluti della funzione
  $$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x - \frac{1}{2} \right|$$
  nell'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, 1 \right]$ (conclusione).

- **Esercizio:** Trovare gli estremi superiore e inferiore della stessa funzione nell'intervallo $\left(-\dfrac{3}{4}\,,\,1\right)$.
- **Esercizio:** Dato il grafico di una funzione f, disegnare il grafico di f'.
- **Esercizio:** Calcolare la derivata della funzione x^x.
- **Esercizio per casa:** Dire se la funzione x^x è prolungabile in maniera derivabile nell'origine.
- **Esercizio:** Calcolare la derivata della funzione $f(x)^{g(x)}$, se f e g sono derivabili (con $f(x) > 0$).
- **Esercizio :** Stabilire se la funzione $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{|x|+1} + 2x$ è invertibile nel suo dominio, e in caso affermativo calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = 1 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{3}$.
- **Osservazione:** nella scorsa lezione abbiamo visto il seguente

  Teorema: Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b)$ e derivabile in (a,b). Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(a)$ e vale l.

  Tuttavia se $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ non esiste, non si può concludere nulla su $f'_+(a)$, come mostra il seguente
- **Esempio:** La funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
  è derivabile in $x = 0$, tuttavia non esistono $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$.
- **Teorema di Rolle** e suo significato geometrico.
- **Teorema di Lagrange** e suo significato geometrico.

Giovedì 7 novembre 2013 *(2 ore)*

- **Teorema di Cauchy.**
- **Criterio necessario e sufficiente di monotonia.**
- **Criterio sufficiente di stretta monotonia.**
- **Corollario:** Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla.
- **Condizione necessaria e sufficiente per la stretta monotonia di una funzione** (come riportato nel testo [2]).
- **Esercizio:** Verificare che la funzione $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.
- **Esercizio:** Studio degli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x) = x\,e^{-\frac{1}{|x-1|}}$.

Lunedì 11 novembre 2013 *(2 ore)*

- **Esercizio:** provare che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$, e che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ per ogni $x < 0$.
- **Esercizio:** provare che $\ln x \le x - 1$ per ogni $x > 0$.
- **Esercizio:** provare che $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- **Asintoti verticali. Asintoti orizzontali. Asintoti obliqui.** Esempi.
- Come si trova un asintoto obliquo.
- **Esercizio:** Dire se le seguenti funzioni ammettono asintoti obliqui:
$$f(x) = \sqrt{x^2+2}\,, \qquad g(x) = \sqrt{x^2+2x}\,,$$
$$h(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^{7/2}}\,.$$

Martedì 12 novembre 2013 *(2 ore)*

- **Numeri complessi $\mathbb{C}$. Parte reale. Parte immaginaria.**
- Rappresentazione dei numeri complessi, operazioni tra numeri complessi. Esempi.
- **Modulo di un numero complesso. Numeri complessi coniugati.** Esempi.
- **Proprietà del modulo e del coniugato.**
- **Notazione trigonometrica di un numero complesso. Argomento. Notazione esponenziale (notazione di Eulero $e^{i\theta}$). Identità di Eulero.**
- **Esercizi** di trasformazione di un numero complesso da notazione cartesiana a notazione trigonometrica, e viceversa.
- **Prodotto di numeri complessi** in notazione trigonometrica. Significato geometrico.
- Esercizi.
- **Potenze di un numero complesso.**
- **Esercizio:** Calcolare $(1+i)^4$.
- **Esercizio:** Calcolare $(1+i)^{44}$.

Mercoledì 13 novembre 2013 *(2 ore)*

- **Rapporto di due numeri complessi** in rappresentazione trigonometrica.
- **Potenze di un numero complesso. Formula di De Moivre.**
- **Esercizio:** Calcolare $\dfrac{(1-i)^{11}}{(1+i)^7}$.
- **Radici n-esime di un numero complesso** e loro rappresentazione geometrica.
- **Esempio:** soluzioni dell'equazione $z^6 = -1$.
- **Esercizio:** Scrivere i numeri complessi

$$z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 , \qquad w = \frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4}{(-1-i)^6}$$

  sia in forma trigonometrica che nella forma $a + ib$. Successivamente scrivere le radici terze di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso.
- **Teorema fondamentale dell'algebra** (s.d.). Conseguenze.
- **Osservazione:** Nei numeri reali il teorema non vale!
- **Osservazione:** Proprietà dell'operazione di coniugio:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} , \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} , \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} .$$

- **Proposizione:** Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti **reali.** Se $z_1 \in \mathbb{C}$ è una radice di $P(z)$, anche il suo coniugato $\overline{z_1}$ lo è.

Giovedì 14 novembre 2013 *(2 ore)*

- Ancora sui numeri complessi.
- Derivata seconda, concavità, convessità.

Lunedì 18 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Martedì 19 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Mercoledì 20 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Giovedì 21 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Lunedì 25 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Martedì 26 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Mercoledì 27 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Giovedì 28 novembre 2013 *(2 ore)*

-

Lunedì 2 dicembre 2013 *(2 ore)*

-

Martedì 3 dicembre 2013 *(2 ore)*

-

Mercoledì 4 dicembre 2013 *(2 ore)*

-

Giovedì 5 dicembre 2013 *(2 ore)*

-

Lunedì 9 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Martedì 10 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Mercoledì 11 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Giovedì 12 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Lunedì 16 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Martedì 17 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Mercoledì 18 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Giovedì 19 dicembre 2013 *(2 ore)*

•

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: *Analisi Matematica*, McGraw-Hill (seconda edizione).

[2] P. Marcellini, C. Sbordone: *Analisi Matematica uno*, Liguori editore.