ANALISI MATEMATICA II

per Ingegneria Aerospaziale

– Diario delle lezioni A.A. 2010-2011–

Questo "indice" degli argomenti trattati a lezione nel primo canale del Corso di Analisi Matematica II per Ingegneria Aerospaziale (Proff. S. Carillo, A. Dall'Aglio, A.A. 2010-2011) ha per obiettivo quello di aiutare lo studente a preparare l'esame in parallelo con la frequenza delle lezioni, facilitando la ricerca degli argomenti corrispondenti sui testi consigliati. Preghiamo gli studenti di segnalarci eventuali errori. I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio e Sandra Carillo, docenti co-titolari del corso, e da Alessandro Alla e Francesco Bonghi, tutori del corso.

Il testo principale per la teoria sarà [2].

Per quanto riguarda gli esercizi, su ciascun argomento si consiglia di iniziare da uno o più tra i libri [5], [3], [6], [1]. In un secondo momento si possono utilizzare gli esercizi di [2] e [7].

Lunedì 28 febbraio 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Introduzione al corso.
- **Integrali impropri. Integrali impropri convergenti, divergenti, indeterminati.**
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x}\,.$
- **Esempio importante:** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge per $\alpha < 1$, diverge per $\alpha \geq 1$.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\,.$
- **Esempio importante:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \leq 1$.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx\,.$
- **Importante:** Come procedere per integrali impropri in un intervallo del tipo (a, b) oppure in un intervallo contenente una singolarità.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$
- **Esempio:** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$.
- **Osservazione:** Il seguente modo di procedere è errato:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}.$
- **Osservazione:** un integrale di Riemann è anche un integrale improprio. In altre parole, se $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega\to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx\,.$$
- **Integrali impropri di funzioni a segno costante.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 9.7, 9.7.1.

Martedì 1 marzo 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Criterio del confronto per integrali impropri.**
- **Esempio:** $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x^2+6}$ converge.
- **Teorema (criterio del confronto asintotico).**
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{4x+5+x^{5/2}}\,dx$ converge.
- **Esercizio:** studiare la convergenza di
$$\int_1^5 \frac{dx}{\ln x}\,.$$
- **Esercizio:** studiare la convergenza di
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^4+3x^2+5}\,dx\,.$$

- **Esercizio:** studiare la convergenza di
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+3x^2}\,dx\,.$$
- **Tabella delle funzioni "campione" con cui fare il confronto:**
  1. Per $x \to +\infty$: $\dfrac{1}{x^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$);
  2. Per $x \to x_0^+$: $\dfrac{1}{(x-x_0)^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$);
  3. Per $x \to x_0^-$: $\dfrac{1}{(x_0-x)^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$);
  4. Per $x \to -\infty$: $\dfrac{1}{(-x)^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$).
- **Esercizio:** al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza di
$$\int_3^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-2}\right)^\alpha dx\,.$$
(Soluzione: converge se e solo se $\alpha > 1$).
- **Esercizio:** al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza di
$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-2)^\alpha}\,dx\,,$$
e calcolarlo per $\alpha = 2$. *(Soluzione: converge se e solo se $\alpha > 1$; per $\alpha = 2$ vale $\frac{1}{10}(14\operatorname{arctg}3 - 2\pi + \ln 10)$).*
- **Proposizione (variante al criterio del confronto asintotico)** Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}^+$ funzioni Riemann-integrabili in $[a,\omega]$ per ogni $\omega \in (a,b)$. Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to b^-$, e se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- **Esercizio:** Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|^\alpha}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$
(Soluzione: converge se e solo se $\alpha > -\frac{2}{3}$).
- **Assoluta integrabilità.**
- **Teorema (assoluta integrabilità):** Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile in $[a,\omega]$ per ogni $\omega \in (a,b)$. Se f è assolutamente integrabile in $[a,b)$, allora è integrabile in $[a,b)$. Inoltre vale la disuguaglianza triangolare
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$
(s.d.)
- **Esempio:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ converge.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 9.7.1, 9.7.2.

Mercoledì 2 marzo 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Esercizio:** $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x^2}{\sqrt{27x^3-1}}\,dx$. *(Soluzione: converge).*
- **Osservazione:** la convergenza è una condizione sufficiente, non necessaria per la convergenza dell'integrale: ad esempio, gli integrali
$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$$
convergono, ma non assolutamente.
- **Osservazione:** Se $f(x)$ è una funzione continua, decrescente e infinitesima in $[0,+\infty)$, allora l'integrale
$$\int_0^{+\infty} f(x)\operatorname{sen} x\,dx$$
converge (s.d.).
- **Teorema (criterio integrale per serie a termini positivi).**
- **Osservazione:** Adesso siamo finalmente in grado di dimostrare il carattere della serie armonica generalizzata
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$
- **Esempio importante:** l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta x}$:
  - converge per ogni $\alpha > 1$, qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$;
  - diverge per ogni $\alpha < 1$, qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$;
  - se $\alpha = 1$, converge per $\beta > 1$, diverge per $\beta \le 1$.

  Ne segue che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ ha esattamente lo stesso carattere dell'integrale, per ogni α, β.
- **Esercizio per casa:** studiare la convergenza dell'integrale
$$\int_{16}^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^\alpha (\ln\ln x)^\beta (\ln\ln\ln x)^\gamma}$$
e della serie
$$\sum_{n=16}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^\alpha (\ln\ln n)^\beta (\ln\ln\ln n)^\gamma}$$

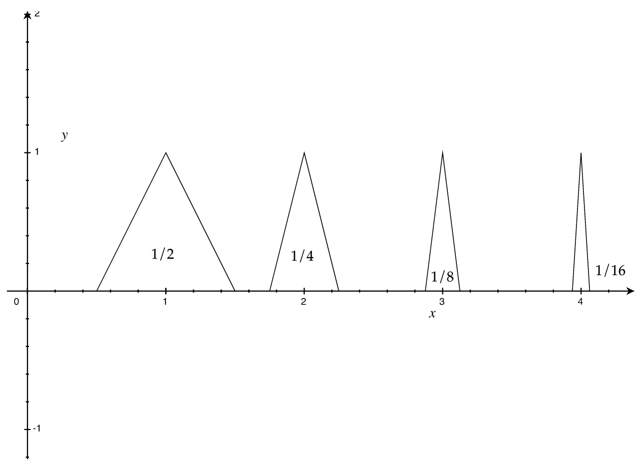
Soluzione: se $\alpha > 1$, convergono; se $\alpha < 1$, divergono; se $\alpha = 1, \beta > 1$, convergono; se $\alpha = 1, \beta < 1$, divergono; se $\alpha = \beta = 1, \gamma > 1$, convergono; se $\alpha = \beta = 1, \gamma \leq 1$, divergono).

- **Osservazione:** Per gli integrali, a differenza delle serie, **non si ha**

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,. \qquad (1)$$

Ad esempio, considerare $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$, oppure $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, dove $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x-n)$, e

$$A_n(y) = \begin{cases} 1 - 2^n|y| & \text{se } |y| < 2^{-n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



(quest'ultimo esempio non è stato fatto a lezione). Tuttavia la (1) diventa vera se si suppone che il limite scritto a destra esista (ad esempio, questo è vero se f è decrescente).

- **Esercizio:** Determinare se la regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ e i suoi asintoti obliqui ha area finita oppure infinita, e, se risulta finita, calcolarla.

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 9.7.2, 9.8.

Giovedì 3 marzo 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Richiami su $\mathbb{R}^N$:** operazioni su vettori di $\mathbb{R}^N$. **Prodotto scalare di due vettori. Modulo di un vettore** e sue proprietà. **Distanza euclidea di due vettori** e sue proprietà. Cenni su altre distanze in $\mathbb{R}^N$. **Intorno sferico** di un punto in $\mathbb{R}^N$.

- **Funzioni da $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$. Dominio, dominio naturale, codominio, immagine di una funzione di N variabili. Grafico di una funzione di N variabili.** Esempi.

- **Esercizio:** Trovare e disegnare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \arccos\frac{x+y}{2}\,.$$

- **Esercizio:** Trovare e disegnare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\log(1-(x^2+y^2))}\,.$$

- **Intorni sferici** di un punto. Intorni di infinito.

- **Punti di accumulazione** di un insieme. Esempi.

- **Punti interni, punti esterni ad un insieme. Insiemi chiusi, insiemi aperti.** Esempi

- **Proposizione:** L'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è aperta. L'intersezione di una famiglia **finita** di insiemi aperti è aperta. L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi chiusa è chiusa. L'unione di una famiglia **finita** di insiemi chiusa è chiusa. (s.d.)

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 10.1, 10.1.1.

Giovedì 3 marzo 2011 *(tutoraggio - 2 ore - A. Alla)*

- **Esercizio** Calcolare i seguente integrali impropri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\,dx.$$

- **Esercizio** Stabilire il carattere dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 \frac{2-\sqrt{x}-2\cos x}{x}\,dx\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}\,dx\,;$$

$$\int_3^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-2}\right)^{\alpha} dx\,, \quad \alpha\in\mathbb{R};$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{1}{x}}{\log(x^4+3)-4\log x}\,dx\,;$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\,dx; \qquad \int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,dx;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)}\,dx;$$
$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\,\sqrt{2x+3}}\,dx$$

- **Esercizio** Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^\alpha}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(4+9x)^{\beta+1}}\,dx;$$
$$\int_2^3 \frac{x\left(\sin(x-2)\right)^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

Lunedì 7 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Definizione di limite.**
- **Proprietà elementari del limite.**
- **Non esistenza del limite.**
- **Esempio:** $f : R^2 \backslash (0,0) \to R^2$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ non esiste}\,.$$

- **Coordinate polari. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite.** esempio precedente riconsiderato mediante l'introduzione delle coordinate polari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:Sect. 10.2, 10.3.3**

Martedì 8 marzo 2011 *(tutoraggio - 2 ore - F. Bonghi)*

- Studiare l'insieme di definizione in $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni:
  * $f(x,y) = \sqrt{xy-1}\,\log(5-2x-2y)$,
  * $f(x,y) = \sqrt{x\sin\left(\pi(x^2+y^2)\right)}$,
  * $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{(|x|-1)\,(|y|-1)}{|x|+|y|-1}}$.
- Verificare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

Martedì 8 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Limite di funzioni a valori vettoriali e scalari**.
- **Successioni a valori vettoriali.**
- **Esempio:** la successione

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

  converge per $n \to \infty$ al punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
- **Continuità** con esempi e controesempi.
- **Successioni a valori in $\mathbb{R}^N$. Teorema ponte (di collegamento).**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]: 10.2** (fino all'uniforme continuità esclusa),**10.2.1, 10.3.2.**

Mercoledì 9 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Teorema di Weierstrass.**
- **Derivate direzionali.**
- **Derivate parziali.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]: 10.3, 10.3.1,11.1**.

Giovedì 10 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Il teorema del differenziale totale.**
- **Continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili.**
- **Derivate direzionali e parziali di ordine superiore.**
- **Teorema di Schwarz.** Esempi
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:11.2, 11.3** (derivate seconde)

Giovedì 10 marzo 2011

(tutoraggio - 2 ore - A. Alla)

- DA COMPLETARE

Lunedì 14 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Matrice hessiana.**
- **Differenziale secondo. Osservazioni sulla notazione.**
- **Esempio in** $\mathbb{R}^2$:

  Data la funzione $f(x,y) = x^3 + 6y^2 + xy$, notato che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, scrivere la matrice hessiana nel generico punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

  fissato il punto $(x,y) = (1,2)$ calcolare, $D^2_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(1,2)$, precisandolo nel caso $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.
- **Polinomio di Taylor (e di Mac Laurin) di ordine** 2. Caso particolare di una funzione di 2 variabili.
- **Polinomio di Taylor (e di Mac Laurin) di ordine** n **e formula di Lagrange per il resto.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]: 11.3, 11.4**, teorema 11.4 con dim.

Martedì 15 marzo 2011 *(tutoraggio - 2 ore - A. Alla)*

- **Esercizio:** Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste,
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2-2x+1)\,y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha}\,.$$
  (*Soluzione:* Il limite esiste, e vale 0, se e solo se $\alpha < 3/2$).
- **Esercizio:** Sia $f(x,y) = x - \log(xy^2)$; dopo averne trovato il dominio, determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\big(1,1,f(1,1)\big)$.
  (*Soluzione:* $z = 3 - 2y$).
- **Esercizio:** Siano $\mathbf{w} = (2,-1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ e $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = xy^2 - \arctan(xy)\,.$$
  Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,-2)\,.$
  (*Soluzione:* $\dfrac{13}{\sqrt{5}}$).
- **Esercizio:** Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $(x_0,y_0) = (0,0)$ di
$$f(x,y) = 1 + \log(1 + x^2 - y)\,.$$
  (*Soluzione:* $T_2(x,y) = 1 - y + x^2 - y^2/2$).
- **Esercizio:** Trovare il dominio edlla funzione
$$f(x,y) = \sqrt{(y-2x)\,(1-x^2-y^2)}\,.$$
- **Esercizio:** Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{2} - x^2 + xy - 2x - y^2$. Determinare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$. Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(0,1)$ secondo la direzione $\lambda = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$.
- **Esercizio:** Definita la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan(\dfrac{y}{x}) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$
  verificare che per $(x,y) \neq (x,0)$ si ha $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ mentre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$
- **Esercizio:**

  (i) Calcolare $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ dove $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$, per $(x,y) \neq (0,0)$.
  (ii) Prolungare con continuità la funzione in $(0,0)$ e stabilire se f così definita è differenziabile.

Martedì 15 marzo 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Introduzione agli integrali doppi.
- **Suddivisioni di un rettangolo. Somme superiori e somme inferiori di una funzione, relativamente ad una suddivisione. Integrale doppio di Riemann su rettangoli di** $\mathbb{R}^2$**. Funzioni integrabili su rettangoli.**
- **Teorema:** Una funzione continua su un rettangolo chiuso è integrabile (s.d.).
- Esempio di funzione limitata ma **non integrabile** in un rettangolo: la funzione di Dirichlet
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{se } (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$
  non è integrabile in $[0,1]^2$.
- **Teorema: principali proprietà dell'integrale** (s.d.).
- **Teorema (formule di riduzione per il calcolo degli integrali doppi su rettangoli)** (s.d.)
- Esercizio: Calcolare
$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} \ln(1+x+2y)\,dx\,dy\,.$$
- Significato geometrico delle formule di riduzione: calcolo del volume di un solido affettandolo parallelamente a un piano e integrando le aree delle "fettine" ottenute.

- Esercizio: Calcolare $\iint_Q x^3 e^{yx^2}\, dx\, dy$, dove $Q = [1,2] \times [1,3]$. Si osservi che in questo caso è cruciale scegliere bene l'ordine di integrazione.
- Esercizio: Calcolare
$$\iint_Q \frac{y}{\sqrt{x^2+2y^2}}\, dx\, dy$$
dove $Q = [1,2] \times [0,1]$.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 14.1.

Mercoledì 16 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Insiemi convessi,** e definizione del segmento $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ (sia aperto che chiuso).
- **Matrice Hessiana.**
- **Formula di Taylor al secondo ordine** 2 **e all'ordine** m**.**
- **Formula di Lagrange al secondo ordine** 2 **e all'ordine** m
- **Definizione di max e min locali e punti di sella**
- **Esempi**: con calcolo matrice hessiana e analisi dei 3 casi diversi
$f_1(x,y) = x^2+y^2,\ f_2(x,y) = -x^2-y^2,\ f_3(x,y) = x^2-y^2$
- **Estremi liberi di funzioni a valori scalari.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 11.5., 11.6

Lunedì 21 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Integrali Doppi: caso generale.**
- **Definizione di funzione integrabile e di insieme misurabile (Peano- Jordan).**
- **Insiemi di misura nulla in** $\mathbb{R}^2$
- **Esempio**: Grafico di f in $\mathbb{R}^2$
- $\Omega \in \mathbb{R}^2$ **limitato misurabile** $\longleftrightarrow |\partial\Omega| = 0$**.**
- **Esempio**: insieme compatto limitato, data $f : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\ ,\ f \in C^0([a,b])\}$
- **Integrali Doppi: additività rispetto al dominio di integrazione.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.2.

Martedì 22 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Definizione di dominio normale (semplice) risp. asse x (o y).**
- **Integrali Doppi: formule di riduzione nel caso generale** con dimostrazione nel caso di dominio normale risp. asse x.
- **Esempio in** $\mathbb{R}^2$: calcolo di
$$I = \iint_D \sin(x-y) dxdy$$
D compatto di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle rette
$x = \frac{\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{2},\ y = -x.$
- **Esempio in** $\mathbb{R}^2$: calcolo di
$$|D| = \iint_D dxdy \quad ,$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$
.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.2.1.

Mercoledì 23 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Cambiamento di coordinate delle variabili di integrazione in** $\mathbb{R}^2$**.**
- **Coordinate polari in** $\mathbb{R}^2$**.**
- **Esempio**: calcolo di
$$|D| = \iint_D dxdy \quad ,$$
  1. D compatto (porzione di corona circolare) di $\mathbb{R}^2$ delimitato da
  $y = 0,\ x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4,\ y = -x,$ corrispondente ad un intervallo nel piano ρ, θ;
  2. $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \le 4$$
  parametrizzazione della frontiera $x^2 + 4y^2 = 4$.

  D compatto (porzione di corona circolare) di $\mathbb{R}^2$ delimitato da
  $y = 0,\ x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4,\ y = -x.$ indicazione del metodo di calcolo in coordinate cartesiane e calcolo nelle coordinate ρ, θ (polari con cambiamento di scala).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.3, 14.3.1

Giovedì 24 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Funzioni vettoriali a valori vettoriali** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$**.**
- **esempi:** campo di forze posizionali in $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$.
- **Osservazioni** differenze tra il caso $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con esempi: funzione reale di piu' variabili) e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, funzione vettoriale di una variabile reale
- **Funzioni vettoriali a valori vettoriali** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$derivabilità e differenziabilità
- **Polinomi di Taylor e grafici di funzioni**: confronto tra il grafico di funzioni di 1 o 2 variabili ed i relativi polinomi di Taylor (visualizzazione con il calcolatore).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 11.7 .

Lunedì 28 marzo 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Baricentro di domini piani.**
- **Esercizio:** Calcolare il baricentro di un semicerchio.
- **Esercizio:** Calcolare il volume di una palla.
- Significato del termine ρ che compare nel passaggio a coordinate polari per integrali doppi.
- **Esercizio:** Dato l'insieme
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \geq 1 \ , \ 0 \leq y \leq x \leq 1 + \frac{y}{2}\right\},$$
calcolare
$$\iint_A \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy\,.$$
- Esercizi su cambiamenti di variabile "ad hoc":
- **Esercizio:** Calcolare
$$\iint_A \sqrt{4x^2 + 9y^2}\, dx\, dy\,,$$
dove
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + 9y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq -\frac{2}{3}x\right\}.$$
- **Esercizio:** Calcolare
$$\iint_A (x + y)\, \log(x - y)\, dx\, dy\,,$$
dove
$$A = \left\{(x, y) \ : \ 1 - x \leq y \leq 3 - x\,,\ x - 1 \leq y \leq x - 1/2\right\}.$$
- **Esercizio:** Calcolare
$$\iint_A \frac{x^3}{y}\ \mathrm{sen}(xy)\, dx\, dy\,,$$
dove
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq y \leq 2x\,,\ 1 < xy < 2\right\}.$$
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.3.1, 14.3.2.

Martedì 29 marzo 2011 *(tutoraggio - 2 ore - F. Bonghi)*

- Disegnare l'insieme D tale che
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_1^4 \left(\int_{\frac{2}{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y)\, dy \right) dx,$$
per ogni funzione continua f, e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.
- Disegnare l'insieme D tale che
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2-2x}^{x^2-2x+2} f(x, y)\, dy \right) dx,$$
per ogni funzione continua f, e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.
- Scrivere il seguente integrale in modo da eliminare il valore assoluto nella funzione integranda.
$$\iint_D |(1 + x)y - 1 + x|\, dx\, dy,$$
dove
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y > 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$
- Calcolare
$$\iint_D (x + y)e^{x^2+y^2}\, dx\, dy,$$
dove
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1\right\}.$$
- Calcolare
$$\iint_D \frac{x + y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$
dove
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y > |x|\right\},$$
- Calcolare
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy,$$
dove
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \geq 4\,;\ x, y \in (0, 2)\right\}.$$

Martedì 29 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Integrazione in** R^3: introduzione e proprietà.
- **Volume di un compatto di** R^3**.**
- Domini normali rispetto al piano xy. Formule di decomposizione degli integrali tripli.
- **Esempio:** data $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, $f \in C^0(D)$, calcolare il volume, di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- **Coordinate cilindriche in** R^3**.**
- **Esempio:** calcolo del volume di un cilindro circolare retto:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq b^2 \,, 0 \leq z \leq h(1 - b/h)\}.$$

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:Sect. 14.4, 14.1**

Mercoledì 30 marzo 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Integrazione in** R^3**.**
- **Dimostrazione integrale dominio di rotazione** R^3**.**
- **Esempio:** data $g : [c, d] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $g \in C^0([c, d])$, calcolare il volume, di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d, x^2 + y^2 \leq g(z)\}.$$

- **Coordinate polari in** R^3**.**
- **Esempio:** calcolo del volume di

$$B_R = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:Sect. 14.4.2**

Giovedì 31 marzo 2011 *(1 ora - S. Carillo)*

- **Integrazione in** R^3: due esempi di calcolo

Venerdì 1 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

Curve Integrali curvilinei

- **Curve parametrizzate** in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ con esempi
  1. circonferenza;
  2. grafico di una funzione continua $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- **Curva regolare.**
- **Esempi:** circonferenza di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$:

$$\gamma : \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

  e $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$.

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:Sect. 10,2.3, 12.1, 12.1.1**

Lunedì 4 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

Curve e Integrali curvilinei

- **Integrabilità di funzioni vettoriali.**
- **Integrali curvilinei di I specie** e loro proprietà.
- **Curva rettificabili, lunghezza.**
- **Ascissa curvilinea e cambio di parametro.**
- **Esempi**: lunghezza di archi di curva regolare:
  1. circonferenza:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

  2. arco di elica cilindrica:

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:Sect. 12.1.2, 12.2**

Martedì 5 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

Curve e Integrali curvilinei

- **Integrali curvilinei di II specie** e loro proprietà.
- **Forme differenziali lineari**.
- **Forme differenziali esatte e chiuse** definizione.
- **Forme differenziali: esattezza implica la chiusura** conseguenza teorema di Schwartz.
- **Osservazione ed esempio importanti:** Non vale il viceversa: la forma differenziale
$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$
è chiusa ma non esatta nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Infatti, data la circonferenza
$$\gamma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$
verificare
$$I := \int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\ dx + \frac{x}{x^2+y^2}\ dy \neq 0.$$
- osservazione: il risultato ottenuto NON dipende dal raggio r della circnferenza scelta
- **Aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^n$.** Esempi in $\mathbb{R}^2$.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:Sect. 12.4, 12.4.1**(inizio)

Mercoledì 6 Aprile 2011 *(2 ore - - S. Carillo)*

- **Teorema:** Calcolo dell'integrale di una forma differenziale esatta (o di un campo vettoriale conservativo) lungo una curva.
- **Corollario:** L'integrale di una forma differenziale esatta (o di un campo vettoriale conservativo) lungo una curva chiusa è nullo.
- **Esercizio:** calcolare l'integrale esteso alla curva chiusa $\gamma : x^2+y^2 = r^2$ della forma differenziale e verificare che
$$\oint_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = 0 \ , \quad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$
- al contrario, cf.r esempio già visto, i.e. data
$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$
$$\oint_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi \ , \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$
e lungo una qualsiasi curva semplice e chiusa, frontiera di un compatto che contiene l'origine.
- **Osservazione:** Se U è un potenziale di ω, anche $U+c$ lo è.
- **Aperto connesso (per archi)** di $\mathbb{R}^N$.
- **Proposizione:** Sia ω una forma differenziale esatta in E aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Se U_1 e U_2 sono due primitive di ω su E, allora esse differiscono per una costante.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.4.1 .

Giovedì 7 Aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2$.** Esempi.
- **Teorema:** Una forma differenziale di classe C^1 e chiusa in un aperto semplicemente connesso è anche esatta (senza dim.).
- **Esempio** forma differenziale chiusa, ma non esatta in $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ è esatta in $\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:
$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \ , \ (x,y)$$
determinazione della primitiva.
- metodi di calcolo della primitiva di una forma differenziale esatta:
  1. integrazione lungo un cammino *opportuno* ad esempio spezzata o arco di curva;
  2. integrazione rispetto ad una variabile e successiva determinazione della funzione arbitraria dell'altra variabile
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 12.4.2.

Lunedì 11 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- formule di Green nel piano
- conseguenza: il valore dell'integrale di una forma differenziale chiusa è lo stesso su linee chiuse omotope
- **Equazioni differenziali ordinarie** e loro classificazione.
- **Esempi:** esempi applicativi: crescita esponenziale (modello di popolazione di cellule in assenza di competizione) e $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$ (moto di un punto soggetto a campo di forze assegnato).
- **EDO lineari del primo ordine:** definizioni di soluzione, **problema di Cauchy, eq. omogenea associata.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 15.3.1 (senza corollario 15.1) 16 introduzione, 16.1 (inizio).

Martedì 12 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Teorema** di classificazione delle soluzioni di $y' = a(x)y$.
- **Integrale generale di una EDO.**
- **Esercizio:** Trovare l'integrale generale di $y' = \alpha y$.
- **Esercizio:** Trovare l'integrale generale di $y' = f(x)y$.
- **Equazioni non omogenee:** tutte le soluzioni sono date dall' integrale generale dell'omogenea associata + una soluzione particolare $\tilde{y}$ della non omogenea.
- **Metodi per la ricerca della soluzione particolare di un'equazione lineare non omogenea del primo ordine:**
  1. **Metodo della variazione della costante** e formula generale per la risoluzione delle EDO lineari del primo ordine.
  2. **Metodo di similitudine:** applicazione alla risoluzione di equazioni con termini noti polinomiali (esempio: $y' = 3y + x - 1$), esponenziali (esempio: $y' = 2y + 3e^{\lambda x}$, discussione del caso di termine noto già soluzione dell' omogenea), trigonometrici (esempio: $y' = -y + 3\,\mathrm{sen}\,4x$).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.1.

Mercoledì 13 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **EDO a variabili separabili: risoluzione per integrazione.**
- **Esempio:** $y' = 2xy^2$.
- **Equazioni del primo ordine in forma normale:** $y' = f(x, y)$.
- condizione di Lipschizianità di f rispetto ad y.
- **Teorema di esistenza, unicità della soluzione del problema di Cauchy in forma normale** (senza dimostrazione).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.2.

Giovedì 14 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Equazioni differenziali del II ordine**
- metodo di determinazione della soluzione generale di una EDO a coefficienti costanti del II ordine.
- equazione caratteristica
- teorema fondamentale dell'algebra: enunciato e caso particolare di coefficienti reali
- **Esempio 1:** Studio dell'oscillatore armonico: EDO a coefficienti costanti
  $$y'' + \omega^2 y = f(x)$$
  determinazione della soluzione generale in vari casi:
  1. caso omogeneo $f(x) = 0$;
  2. forzante polinomiale $f(x) = 3x$
  3. forzante esponenziale $f(x) = 2e^x$
  4. forzante periodica $f(x) = \cos x$
  5. forzante periodica $f(x) = \cos(\omega x)$
- **Esempio 2:** Studio dell'oscillatore armonico smorzato: EDO a coefficienti costanti
  $$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = f(x), \alpha \in \mathbb{R}^+$$
  Confronto tra i due casi ed anche (cenni) alla dipendenza da α. Assegnato esercizio da fare in aula (formule di Green nel piano)
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.5, 16.6, 16.6.1, 16.6.2.

Lunedì 18 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- Cenno ad alcune altre equazioni e metodi risolutrivi;
- **Soluzione di equazioni differenziali** *per serie*: i.e. ricerca di soluzione nella forma
  $$y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_k x^k,$$
  dove a_k sono costanti da determinare; (ricordando la derivazione termine a termine nel caso di serie di potenze)
- **esempio**: determinazione della soluzione del problema di Cauchy:
  $$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.7

Martedì 19 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Sistemi di Equazioni differenziali del I ordine:**
  1. esempio di sistema di 2 e.d.o. lineari $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}, \mathbf{y} \in R^n$;
  2. un esempio in $\mathbb{R}^2$;
  3. caso particolare: data una e.d.o. di ordine n, si la può scrivere sotto forma di sistema di e.d.o. del I ordine ad essa equivalente;
  4. **osservazione**: in generale un sistema di e.d.o. del primo ordine non è equivalente ad una e.d.o. di ordine n;
  5. Sistemi di Equazioni differenziali del I ordine a coefficienti costanti;
  6. sistema omogeneo e non omogeneo.
- **Riferimenti sul testo consigliato (sistemi) [2]:** § . 16.3, 16.3.1, 16.3.2 (senza rappresentazione grafica).

Mercoledì 20 aprile 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **EDO a variabili separabili: risoluzione per integrazione.**
- **Esempio:** $y' = 2xy^2$.
- **Equazioni del primo ordine in forma normale:** $y' = f(x, y)$.
- condizione di Lipschizianità di f rispetto ad y.
- **Teorema di esistenza, unicità della soluzione del problema di Cauchy in forma normale** (senza dimostrazione).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.2.

Giovedì 28 aprile 2011 *(2 ore + 1 ora tutoraggio - S. Carillo)*

- **Equazioni differenziali del I ordine ottenute eguagliando a zero una forma differenziale:**
  1. forma esatta e sua primitiva come integrale in forma implicita dell'e.d.o.;
  2. un esempio
  3. forma non esatta: ricerca del *fattore integrante*
  4. esempio: $(x^2 - y)dx + 2xydy = 0$
  5. altri esempi.
- esempio di sistema di 2 e.d.o. lineari $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}, \mathbf{y} \in R^n$;
- **Riferimenti sul testo consigliato[8]:** Cap. 8 § 3.

Lunedì 2 maggio 2011 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Riferimenti sul testo consigliato (sistemi) [2]:** § .

Lunedì 2 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Superfici regolari. Varie scritture della condizione di regolarità.** Analogie con le curve regolari.
- **Superfici grafico.**
- **Esempio:** paraboloide $z = x^2 + y^2$.
- **Esempio:** sfera.
- **Esempio:** cilindro circolare retto.
- **Esempio:** cono circolare retto.
- **Sostegno di una superficie regolare. Curve coordinate. Significato dei vettori φ_u e φ_v.**
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 94, 95.

Martedì 3 maggio 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- operatore ∇, definizione di rotore gradiente e divergenza in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$;
- applicazioni nel piano;
- Formule di Green: alcune conseguenze nel piano:
  1. Conseguenze delle formule di Green nel piano: **Corollario 15.1**
  2. **teorema della divergenza;**
  3. **teorema del gradiente;**
  4. **teorema di Stokes;**
  5. integrazione *per parti* in $\mathbb{R}^2, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio di Green:
$$\iint_\Omega u_x(x,y)v(x,y)\,dx\,dy =$$
$$\int_{+\partial\Omega} u(x,y)v(x,y)\,dy - \iint_\Omega u(x,y)v_x(x,y)\,dx\,dy$$
$$\iint_\Omega u_y(x,y)v(x,y)\,dx\,dy =$$
$$-\int_{+\partial\Omega} u(x,y)v(x,y)\,dx - \iint_\Omega u(x,y)v_y(x,y)\,dx\,dy$$
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 15.3.1 (completamento), 15.3.2, 15.3.3 e15.3.4 (limitatamente a $\mathbb{R}^2$).

Mercoledì 4 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Versore normale e piano tangente ad una superficie in un punto.**
- **Esercizio:** determinare versore normale e piano tangente al cono
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = 3\rho \end{cases}$$
nel punto $(-2\sqrt{3}, 2, 12)$.
- Osservazione: il versore normale è determinato a meno del segno (cambiando l'ordine dei parametri, cambia la direzione del versore normale).
- Osservazione: Nel caso di una superficie grafico, il piano tangente coincide con quello definito durante lo studio delle funzioni di due variabili.
- **Area di una superficie.**
- **Esempio:** area di una sfera.
- **Esempio:** area di una superficie grafico.
- **Esercizio:** disegnare la parte di superficie $z = 2y^2$ che ha per proiezione sul piano xy il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,1)$, e calcolarne l'area.
- **Esercizio:** Calcolare l'area della superficie laterale di un cono circolare retto.
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 96, 97.

Giovedì 5 maggio 2011 *(2 ore - S. Carillo)*

- **Equazioni differenziali del II ordine:**
- cambiamenti di variabile: equazione di Eulero;
- metodo di Frobenius per la determinazione della soluzione generale di una EDO a coefficienti continui del II ordine (cenni):
  - idea del metodo come generalizzazione del metodo di risoluzione per serie i.e. ricerca di soluzione nella forma
  $$y(x) = \sum_0^\infty a_k x^{k+\alpha},$$
  dove a_k, α sono costanti da determinare;
  - Esempio
- **Equazioni differenziali del I ordine:**
  - metodo qualitativo e andamento qualitativo della soluzione
  - **Esempio 1**: $y' = y\sin y$
  - soluzioni esplicite $y(x) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
  - andamento qualitativo soluzioni nel piano xy
  - **Esempio 2**: $y' = (y - x)\sin y$
  - soluzioni esplicite $y(x) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
  - andamento qualitativo soluzioni nel piano xy.
  - **Riferimenti sul testo consigliato [2]: § 16.7, 16.7.2, 16.7.4,**
  - **Riferimenti sul testo consigliato [8]: § 49 p.259.**

Lunedì 9 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Ripasso delle equazioni differenziali lineari del primo ordine.
- **Equazioni differenziali di Bernoulli.** Tecniche di risoluzione.
- **Esercizio:** $y' + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{\sqrt{y}}$.
- **Esercizio:** $y'' + \dfrac{y'}{x} + (y')^2 = 0$.

* * *

- **Osservazione importante:** si ha anche
$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{EG - F^2}\,,$$
dove
$$E = |\varphi_u|^2\,, \quad G = |\varphi_v|^2\,, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v\,.$$
Più in generale, per ogni coppia di vettori V, $W \in \mathbb{R}^3$, si ha sempre:
$$|V \wedge W|^2 = |V|^2\,|W|^2 - |V \cdot W|^2\,.$$
- **Esempio:** elicoide. Ripasso sulle curve: elica circolare.
- **Esempio:** Toro (ciambella).
- **Esempio importante: superfici di rotazione.** Sfera, cilindro circolare retto, cono circolare retto.
- **Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione.** Interpretazione del teorema. Analogia con il teorema di Guldino per i volumi dei solidi di rotazione.
- **Esempio:** calcolo dell'area della sfera mediante il Teorema di Guldino.
- **Esercizio:** calcolare l'area del toro.
- **Integrali di superficie.** Interpretazione: massa di una lamina con densità variabile.

- **Esempio:** Calcolare $\iint_S z^2\, d\sigma$, dove S è la parte della sfera $x^2+y^2+z^2=16$, compresa tra i piani $z=0$ e $z=2\sqrt{2}$ (fatto in due modi diversi).
- **Baricentro di una superficie.**
- **Esercizio:** calcolo del baricentro di una semisfera.
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ .

Martedì 10 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Esercizio:** Disegnare l'insieme
$$T=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z=2-(x^2+y^2)^{3/2}\,,\ x^2+y^2\le 4\big\}\,,$$
e calcolarne l'area.
- **Osservazione:** Come riconoscere e disegnare le superfici di rotazione intorno all'asse z.
- **Esempio importante:** Superfici cilindriche, e loro area.
- **Esercizio:** Determinare l'area della porzione di superficie di equazione $x^2+z^2=1$ compresa tra le due superfici di equazione $y=0$ e $y=(z+h)^2$, dove $h>1$.
- **Osservazione:** giustificazione della formula per l'area di una superficie regolare.
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Mercoledì 11 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Esercizio:** Calcolare
$$\int_S \frac{1}{[1+4(x^2+y^2)]^3}\, d\sigma\,,$$
dove S è il grafico della funzione $z=2xy$, e (x,y) variano nel dominio D contenuto nei semipiani $y\ge 0$ e $y\le -x$, delimitato dalla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine, dall'asse delle x e dalla retta $y=-x$.
- Cenno alle **superfici orientabili.**
- **Esempio** di superficie non orientabile: il nastro di Möbius.
- **Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile.**
- **Espressione del flusso** di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile.
- **Esempio:** Sia γ la curva del piano xy di equazione polare
$$\rho=\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,,$$
e sia S il cilindro retto avente per base ga, di altezza $h=2$, posto nel semispazio $\{z\ge 0\}$. Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z)=(\sqrt{x^2+y^2},0,z^2)$.
- **Dominio regolare di $\mathbb{R}^3$.**
- **Osservazione:** la frontiera di un dominio regolare è costituita da un numero finito di superfici regolari.
- **Divergenza di un vettore in $\mathbb{R}^3$.**
- **Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$.**(s.d.)
- **Esercizio:** Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z)=(3x+\log(1+y^2),y-y^2z,yz^2)$$
uscente dalla frontiera del cono circolare retto di base
$$\big\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\le 4\,,\ z=0\big\}$$
e di vertice $(0,0,3)$.
- **Osservazione:** Interpretazione fisico-geometrica della divergenza di un campo vettoriale.
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Giovedì 12 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Esercizio:** Dato l'insieme D del piano xz definito da
$$D=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 1\,,\ 2(x-1)\le z\le 3(1-x)^3\}\,,$$
sia E il solido contenuto nel semispazio $y\ge 0$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse z. Calcolare il flusso uscente da ∂E del campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(2xy^2+6zy\,,\ x-y^3\,,\ 4x^2z\big)$$
(risoluzione con vari metodi).
- **Esercizio:** Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(2xy\,,\ -y^2\,,\ 2z+x\big)\,,$$
trovare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da ∂A e ∂B, dove
$$A=\big\{(x,y,z)\ :\ -2\le z\le 2-x^2-y^2\big\}\,,$$
$$B=\big\{(x,y,z)\in A\ :\ z\ge 1-x\big\}\,,$$
- **Cenni sulle superfici con bordo.** Esempi.
- **Orientazione del bordo. Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$.**
- **Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$** (s.d.).
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Lunedì 16 maggio 2010

- Didattica sospesa dal Rettore per le elezioni amministrative.

Martedì 17 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Esercizio:** Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+3y+y^2)\,dz\,,$$
dove γ è la curva intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ e del piano $y=2z$. (Svolto in due modi, sia con calcolo diretto che con il teorema di Stokes.)
- **Esercizio:** Dato il campo di forze
$$F(x,y,z) = (2y^3, -x^3, 2z^3)\,,$$
calcolare il lavoro da esso compiuto quando agisce su un punto materiale che compie un giro completo lungo la curva intersezione del cilindro $x^2+y^2=4$ con il piano $x+y+z=1$, orientata in modo arbitrario. (Svolto in due modi, sia con calcolo diretto che con il teorema di Stokes.)
- **Osservazione:** Interpretazione fisico-geometrica del rotore, sia in due che in tre dimensioni.
- Alcuni richiami e osservazioni su campi vettoriali conservativi, irrotazionali, forme differenziali chiuse, esatte, aperti semplicemente connessi.
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 100.

Mercoledì 18 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Funzioni implicite.** Descrizione del problema dell'esplicitazione locale di un'equazione in due variabili.
- **Esempi:** Problema dell'esplicitazione locale dell'equazione $F(x,y)=0$ nei seguenti casi modello:
  * $F(x,y)=x^2+y^2-1$;
  * $F(x,y)=x^2-y^2$;
  * $F(x,y)=x^2+y^2$;
  * $F(x,y)\equiv 0$.
- **Teorema di Dini o delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^2$** per funzioni di classe C^1. (Dim. dell'esistenza della funzione implicita; continuità e derivabilità della funzione esplicitata s.d.; giustificazione della formula per la derivata della funzione esplicitata; queste dimostrazioni saranno in realtà fatte nella lezione successiva)
- **Applicazione** del teorema agli esempi precedenti.
- **Esercizio:** Verificare che l'equazione
$$(x+1)y^2 + \operatorname{sen}(xy) + 3e^x - 1) = 0$$
individua in un intorno di $(0,0)$ una funzione di una sola variabile, e trovare la derivata di tale funzione nel punto 0.
- **Corollario:** Nelle ipotesi del teorema di Dini, se F è di classe C^2, allora anche la funzione esplicitata è di classe C^2, e si ha una formula per la derivata seconda.
- **Osservazione:** Un risultato simile è vero se F è di classe C^n.
- **Teorema:** derivazione di funzioni composte.
- **Esercizio:** Data l'equazione
$$x^3 - 3xy^5 - 2y = 0\,,$$
mostrare che in un intorno del punto $(2,1)$ essa rappresenta il grafico di una funzione di una sola variabile, e trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione così individuata in un intorno del punto dato.
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Giovedì 19 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Dimostrazione (parziale) del teorema delle funzione implicite.
- **Osservazione:** Il teorema delle funzioni implicite fornisce solo delle condizioni sufficienti, non necessarie, per l'esplicitabilità.
- **Esempio:** La funzione $F(x,y)=(y-x^2)^2$ non verifica le ipotesi del teorema del Dini nel punto $(0,0)$, ma ovviamente si esplicita nella forma $y=x^2$.
- **Punto regolare di F.**
- **Corollario:** Sia $A\subset\mathbb{R}^2$ un aperto, Sia $F(x,y)\ :\ A\to\mathbb{R}$ i classe C^1, sia $(x_0,y_0)\in A$ un punto regolare di F tale che $F(x_0,y_0)=0$; allora in un intorno di (x_0,y_0) l'insieme $\{F(x,y)=0\}$ è il sostegno di una curva regolare grafico.
- **Esempio:** tutti i punti dell'insieme $\{x^2+y^2=1\}$ sono regolari.
- **Formula per la retta tangente** ad un punto regolare dell'insieme $\{F(x,y)=0\}$. **Formula per il versore normale.**
- **Esempio:** Trovare la retta tangente e il versore normale all'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ nel punto $\big(1\,,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\big)$.

- **Linee di livello.**
- **Osservazione:** il gradiente è ortogonale alle linee di livello in ogni punto regolare.
- **Esempi:** interpretazione di carte altimetriche o meteorologiche: isoipse e isobare.
- **Teorema delle funzioni implicite in dimensione** 3 **(s.d.).**
- **Piano tangente e versore normale ad una superficie data in forma implicita.**
- **Esercizio:** Verificare che l'equazione
$$f(x,y,z) = \log\sqrt{1+x^2+y^2} - (z-1)e^z = 0$$
definisce implicitamente $z = f(x,y)$ in un intorno di $(0,0,1)$ e che la funzione così definita ha minimo relativo in $(0,0)$.
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Lunedì 23 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Massimi e minimi vincolati** (relativi ed assoluti) in dimensione 2.
- **Osservazione:** Come devono essere disposti il gradiente della funzione e la curva in un punto di estremo locale vincolato.
- **Esempio:** Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = x^2+y^2+\sqrt{3}x+y$ sulla circonferenza $x^2+y^2 = 9$ (svolto in due modi: parametrizzando la circonferenza oppure sfruttando la perpendicolarità del gradiente di f alla circonferenza).
- **Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione 2.**
- **Esercizio:** Un triangolo nel piano xy ha vertici in $(0,0)$, $(x,0)$ e (x,y), con $x,y \geq 0$. Il punto (x,y) non può uscire dal cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2. Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per massimizzare l'area del triangolo.
- **Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per un vincolo in dimensione 3. (s.d.)**
- **Esercizio:** Trovare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo senza coperchio che ha volume massimo se l'area della superficie della scatola è 12.
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Martedì 24 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

-
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Mercoledì 25 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

-
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Giovedì 26 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

-
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Venerdì 27 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

Esercizi di preparazione all'esame.

- **Esercizio:** Dato l'insieme
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x \leq x^2+y^2 \leq 9\right\},$$
calcolare
$$\iint_D xy^2\,dx\,dy$$
sia mediante calcolo diretto, sia mediante opportuni integrali curvilinei.
- **Esercizio:** Sia T il solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse delle x il dominio D definito nel precedente esercizio. Calcolare il baricentro di $T \cap \{x \geq 0\}$.
- **Esercizio:** Determinare, al variare del parametro λ, l'integrale generale della seguente equazione differenziale:
$$y''' - (\lambda+3)y'' + 3\lambda y' = 5.$$
- **Esercizio:** Calcolare
$$\iint_D xy^3\,dx\,dy$$
dove D è la più piccola delle due regioni delimitate dalle curve $x^2+y^2 = 9, \quad y = 3+2x$. Risoluzione con vari metodi.

Lunedì 30 maggio 2010

- Didattica sospesa dal Rettore per le elezioni amministrative.

Martedì 31 maggio 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Ancora sul teorema di derivazione delle funzioni composte.
- **Teorema (derivata di funzione composta I):** Derivata di una funzione della forma $f(x(t), y(t))$. Cenno della dim.
- **Esempi.**
- **Teorema (derivata di funzione composta II):** Derivate parziali di una funzione della forma $f(g(x, y))$.
- **Teorema (derivata di funzione composta, caso generale):** matrice jacobiana di una generica funzione composta di funzioni vettoriali, della forma $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, con $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. (s.d).
- **Corollario:** Derivata della funzione inversa di una funzione vettoriale.
- **Esercizio, da completare per casa:** Scrivere l'espressione del laplaciano di una funzione $f(x, y)$ in coordinate polari. Posto $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$, si ha
$$\Delta f = \nabla^2 f = g_{\rho\rho} + \frac{g_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{g_\rho}{\rho}\,.$$
- **Riferimenti sul testo [2]:** § 11.7.

Mercoledì 1 giugno 2010 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

-
- **Riferimenti sul testo [2]:** §§ .

Riferimenti bibliografici

[1] D. Andreucci, A.M. Bersani: *Risoluzione di problemi d'esame di Analisi Matematica II* - Esculapio/Progetto Leonardo

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: *Analisi Matematica*, McGraw-Hill.

[3] B.P. Demidovich: *Esercizi e Problemi di Analisi Matematica* - Editori Riuniti

[4] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: *Analisi Matematica due*, Liguori editore.

[5] P. Marcellini, C. Sbordone: *Esercitazioni di Matematica, Vol. 2, prima e seconda parte* - Liguori

[6] L. Moschini, R. Schianchi: *Esercizi svolti di Analisi Matematica* - Progetto Leonardo

[7] Gli esercizi disponibili sulla pagina web del corso `http://www.mat.uniroma1.it/~dallaglio/am-aero/`

[8] E. Giusti: *Analisi Matematica 2*, Boringhieri.