ANALISI MATEMATICA II

per Ingegneria Aerospaziale
– Diario delle lezioni –

Questo "indice" degli argomenti trattati a lezione nel secondo canale del Corso di Analisi Matematica II per Ingegneria Aerospaziale (Proff. A. Dall'Aglio, D. Sforza, A.A. 2008-2009) ha per obiettivo quello di aiutare lo studente a preparare l'esame in parallelo con la frequenza delle lezioni, facilitando la ricerca degli argomenti corrispondenti sui testi consigliati. Prego gli studenti di segnalarmi eventuali errori. I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio e Daniela Sforza, docenti co-titolari del corso, e da Agnese Di Castro, tutrice del corso.

Il testo principale per la teoria sarà [2]; su alcuni argomenti (superfici e integrali superficiali) seguiremo invece [4].

Per quanto riguarda gli esercizi, su ciascun argomento si consiglia di iniziare da uno o più tra i libri [5], [3], [6], [1]. In un secondo momento si possono utilizzare gli esercizi di [2] e [7].

---

2 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Introduzione al corso.
- **Integrali impropri. Integrali impropri convergenti, divergenti, indeterminati.**
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.
- Esempio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.
- Esempio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.
- **Esempio importante:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \le 1$.
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$.
- Esempio: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$.
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x}$.
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
- **Esempio importante:** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge per $\alpha < 1$, diverge per $\alpha \ge 1$.
- Come procedere per integrali impropri in un intervallo del tipo (a, b).
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
- Esempio: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
- Esempio: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$.
- Il seguente modo di procedere è errato:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$
- **Osservazione:** un integrale di Riemann è anche un integrale improprio. In altre parole, se $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega\to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx\,.$$
- **Osservazione:** integrali impropri possono apparire anche nel calcolo di integrali di Riemann, a seguito di sostituzioni. Ad esempio: con la sostituzione $\operatorname{tg} x = t$, l'integrale di Riemann
$$\int_0^{\pi/2} R(\operatorname{sen}^2 x\,,\ \cos^2 x\,,\ \operatorname{sen} x \cos x)\,dx$$
diventa l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} R\Big(\frac{t^2}{1+t^2}\,,\ \frac{1}{1+t^2}\,,\ \frac{t}{1+t^2}\Big)\,\frac{dt}{1+t^2}$$
(qui R denota una qualunque funzione razionale fratta).
- **Integrali impropri di funzioni a segno costante.**
- **Criterio del confronto per integrali impropri.**
- Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ converge.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 9.7, 9.7.1.

---

4 marzo 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie.
- Esempi di equazioni differenziali presi dalla fisica:
  1. legge di Newton;
  2. decadimento di una sostanza radioattiva.
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine.
- Definizione di soluzione.
- Problema di Cauchy.
- Equazioni lineari del primo ordine omogenee:
  1. integrale generale;
  2. soluzione del problema di Cauchy.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.1.

---

5 marzo 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Equazioni differenziali lineari del primo ordine non omogenee:
  1. equazione omogenea associata;
  2. la differenza di due soluzioni   soluzione della omogenea associata;
  3. integrale generale;
  4. soluzione del problema di Cauchy.
- Metodi per determinare una soluzione particolare di equazioni non omogenee:
  1. variazione della costante;
  2. metodo *ad hoc* nel caso il termine non omogeneo sia un polinomio o una funzione esponenziale.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.1.

---

7 marzo 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- **Teorema (criterio del confronto asintotico).**
- Esercizio: studiare la convergenza di
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^4+3x^2+5}\,dx\,.$$
- Esercizio: studiare la convergenza di
$$\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+3x^2}\,dx\,.$$
- Tabella delle funzioni "campione" con cui fare il confronto:
  1. Per $x \to +\infty$: $\dfrac{1}{x^\alpha}$;
  2. Per $x \to x_0^+$: $\dfrac{1}{(x-x_0)^\alpha}$;
  3. Per $x \to x_0^-$: $\dfrac{1}{(x_0-x)^\alpha}$;
  4. Per $x \to -\infty$: $\dfrac{1}{(-x)^\alpha}$.
- Esercizio: studiare la convergenza di
$$\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\log x}\,.$$
- Esercizio: Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|^\alpha}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$
(inizio).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 9.7.1.

---

9 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Proposizione (variante al criterio del confronto asintotico)** Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}^+$ funzioni Riemann-integrabili in $[a,\omega]$ per ogni $\omega \in (a,b)$. Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to b^-$, e se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- Esercizio: Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|^\alpha}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$
(conclusione).

- Esercizio: Trovare per quali $\alpha \geq 9$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+\alpha)\,(x+1)}\,dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 13$.

- **Assoluta integrabilità.**

- **Teorema (assoluta integrabilità):** Sia $f\ :\ [a,b) \to \mathbb{R}^+$ una funzione Riemann-integrabile in $[a,\omega]$ per ogni $\omega \in (a,b)$. Se f è assolutamente integrabile in $[a,b)$, allora è integrabile in $[a,b)$. (s.d.)

- Esempio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx\,.$

- Esempio: $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x^2}{\sqrt{27x^3-1}}\,dx\,.$

- **Osservazione:** la convergenza è una condizione sufficiente, non necessaria per la convergenza dell'integrale: ad esempio, gli integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$$

convergono, ma non assolutamente (s.d.).

- **Teorema (criterio integrale per serie a termini positivi).**

- **Esempio importante:** l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta x}$:
  - converge per ogni $\alpha > 1$, qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$;
  - diverge per ogni $\alpha < 1$, qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$;
  - se $\alpha = 1$, converge per $\beta > 1$, diverge per $\beta \leq 1$.

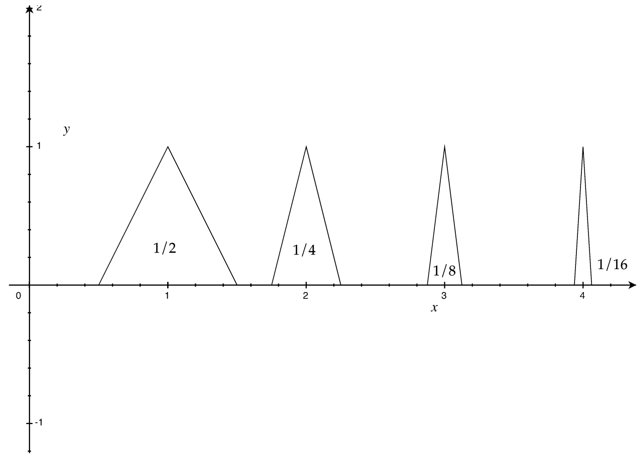
Ne segue che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ ha esattamente lo stesso carattere dell'integrale, per ogni α, β.

- **Osservazione:** Per gli integrali, a differenza delle serie, **non si ha**

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,. \qquad (1)$$

Ad esempio, considerare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$, oppure $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, dove $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x-n)$, e

$$A_n(y) = \begin{cases} 1 - 2^n|y| & \text{se } |y| < 2^{-n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Tuttavia la (1) diventa vera se si suppone che il limite scritto a destra esista (ad esempio, questo è vero se f è decrescente).

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 9.7.1, 9.7.2, 9.8.

---

11 marzo 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Studiare la convergenza semplice e quella assoluta dell'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$

- Esercizio: Studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx\,.$

- Esercizio: Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(2x+3)\big)^\alpha}{(x+3)^3}\,dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$.

- Esercizio: Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge ciascuno degli integrali impropri

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-2)^\alpha}\,dx\,, \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx\,, \quad \int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} x}{|x-2|^\alpha}\,dx\,.$$

---

11 marzo 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Equazioni differenziali lineari del secondo ordine.
- Definizione di soluzione.
- Problema di Cauchy.
- Equivalenza tra un'equazione lineare del secondo ordine e un sistema di due equazioni lineari del primo ordine.
- Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy (senza dimostrazione).
- Equazioni lineari del secondo ordine omogenee.
- Soluzioni linearmente indipendenti.
- Esistenza di soluzioni linearmente indipendenti.
- Struttura dell'integrale generale di equazioni omogenee.
- Struttura dell'integrale generale di equazioni non omogenee.
- Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee:
  1. equazione caratteristica;
  2. determinazione di due soluzioni linearmente indipendenti.
- Cenni al metodo di riduzione dell'ordine.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 16.5, 16.6.1.

---

12 marzo 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Trovare l'area compresa tra il grafico di $f(x) = x \arctan x$ e i suoi asintoti, dicendo a priori se è finita o infinita.
- Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x+e)e^{|x|(\alpha-e)}\,dx.$$

- Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x-2)^6}\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)^{\alpha} dx,$$

  successivamente calcolarlo per $\alpha = 0$.

---

12 marzo 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee: come determinare una soluzione particolare.
- Metodo di variazione delle costanti.
- Metodo *ad hoc* nel caso in cui il termine non omogeneo sia un polinomio, una funzione esponenziale, una funzione trigonometrica tipo $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ o una combinazione lineare delle suddette funzioni.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.6.2.

---

13 marzo 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- **Richiami su $\mathbb{R}^N$:** operazioni su vettori di $\mathbb{R}^N$. **Prodotto scalare di due vettori. Modulo di un vettore** e sue proprietà. **Distanza euclidea di due vettori** e sue proprietà. **Intorno sferico** di un punto in $\mathbb{R}^N$.
- **Funzioni da $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$. Dominio, dominio naturale, codominio, immagine di una funzione di N variabili. Grafico di una funzione di N variabili.** Esempi.
- Trovare e disegnare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \arccos\frac{x+y}{2}\,.$$

- Trovare e disegnare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\log(1-(x^2+y^2))}\,.$$

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 10.1.

---

16 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Punto di accumulazione** di un insieme. Esempi.
- **Proprietà verificate definitivamente per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$**
- **Limite di una funzione di più variabili a valori reali.**
- Esempio: verifica di

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y = 0\,.$$

- Esempio: verifica di
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2} = +\infty\,.$$
- Esempio:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y} \text{ non esiste}\,.$$
- Esempio: verifica di
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy = 6\,.$$
- Osservazione: nelle verifiche si è più volte utilizzato il fatto che la condizione $||(x,y)-(x_0,y_0)|| < \delta$ implica $|x-x_0| < \delta$ e $|y-y_0| < \delta$.
- **Il punto ∞. Intorni di ∞.**
- Esempio: verifica di
$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2+2y^2} = 0\,.$$
- Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, allora anche il limite "lungo le rette" deve valere l, cioè si deve avere
$$\lim_{x\to x_0} f(x, x_0 + m(x-x_0)) = l \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{R}\,.$$
In particolare, se tale limite dipende da m, significa che il limite in due variabili non esiste.
- Esempio:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ non esiste}\,.$$
- Tuttavia può succedere che il limite "lungo le rette" sia lo stesso per ogni retta, ma il limite non esista. Esempi sono i seguenti:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ non esiste}\,.$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ non esiste}\,,$$
dove
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
- **Teorema (dei carabinieri):** Siano $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}) : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^N$. Sia $\mathbf{x}_0$ un punto di accumulazione per D, e supponiamo che $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x})$ definitivamente per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Se
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = l\,,$$
allora anche
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l$$
(dimostrazione identica al caso di una sola variabile scalare).
- **Proposizione** Si ha
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$$
se e solo se
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x})| = 0\,.$$
(dimostrazione immediata).
- Esempio: calcolo e verifica del limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,.$$
- Restano validi (con identiche dimostrazioni) molti teoremi sui limiti che abbiamo già visto in una variabile: il teorema della permanenza del segno, l'aritmetica (estesa) dei limiti (ad esempio: il limite del prodotto è il prodotto dei limiti).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 10.1.1, 10.2, 10.3, 10.3.3.

---

18 marzo 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2) = +\infty;$
- $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2$ non esiste;
- $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^4) = +\infty;$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cos\frac{1}{xy} = 0;$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-3y^2)^2}{x^2+2y^2} = 0;$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2} = 0;$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ non esiste;
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\frac{x^4}{y}$ non esiste.
- Esercizio per casa: provare a far disegnare ad un computer i grafici delle funzioni sopra indicate.

---

18 marzo 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Cenni alle equazioni differenziali lineari di ordine n:
  1. soluzioni linearmente indipendenti;
  2. struttura dell'integrale generale.
- Esempio di un'equazione lineare del terzo ordine a coefficienti costanti con termine non omogeneo del tipo prodotto di un polinomio per un esponenziale.
- Equazioni del primo ordine in forma normale.
- Equazioni a variabili separabili.
- Dominio di esistenza delle soluzioni.
- Unicità delle soluzioni.
- Funzioni di due variabili localmente lipschitziane rispetto alla seconda variabile.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 16.5, 16.2.

---

19 marzo 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Trovare l'integrale generale della seguente equazione
$$y'(x) + 5y(x) = 26\cos x.$$
- Al variare del parametro reale β determinare l'integrale generale dell'equazione
$$y''(x) - 2\beta y'(x) + \beta^2 y(x) = e^{-2x}$$
e individuare tutte le soluzioni tali che
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$
- Si consideri l'equazione
$$y''(x) + y'(x) = x + \cos x.$$
  (a) Determinare l'integrale generale.

  (b) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che
$$\exists \lim_{x\to+\infty} y(x) \in \mathbb{R}$$
  (c) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che
$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty.$$
  ((b) e (c) lasciati per esercizio).

---

19 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Osservazione: anche nel caso di funzioni di più variabili, il limite, se esiste, è unico.
- Espressione del limite in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.
- Si ha
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$$
se e solo se
$$\lim_{\rho\to0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - l \right| = 0\,.$$
- Esempio: al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste,
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2 - 2x + 1)y}{((x-1)^2 + y^2)^\alpha}\,.$$
- **Funzioni continue in un punto e in un insieme.** Esempi.
- Somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni continue sono funzioni continue. (s.d.)
- La composizione di funzione continue è continua.(s.d.)
- In particolare, se $f(x,y)$ (funzione di due variabili reali) è continua in (x_0,y_0), e $g(t)$ (funzione di una variabile reale) è continua in $f(x_0,y_0)$, allora la composizione $g\circ f$ è continua in (x_0,y_0).(s.d.)
- Se le due funzioni di una variabile $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0, e se $h(u,v)$ è continua in $(f(x_0), g(x_0))$, allora la funzione di una variabile $\phi(x) = h(f(x), g(x))$ è continua in x_0.(s.d.)
- **Elementi di topologia di $\mathbb{R}^N$: Punti interni ad un insieme, punti esterni, frontiera di un insieme. Insiemi aperti, insiemi chiusi.** Esempi. Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi.
- **Proposizione:** Se $f(x,y)$ è una funzione continua e $a \in \mathbb{R}$, allora gli insiemi
$$\{(x,y)\ :\ f(x,y) \ge a\}\,, \qquad \{(x,y)\ :\ f(x,y) \le a\}\,,$$
$$\{(x,y)\ :\ f(x,y) = a\}$$
sono chiusi; gli insiemi
$$\{(x,y)\ :\ f(x,y) > a\}\,, \qquad \{(x,y)\ :\ f(x,y) < a\}$$
sono aperti (s.d.) (la stessa proposizione vale più in generale in $\mathbb{R}^N$).
- **Proposizione:** L'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un aperto. L'intersezione di un numero **finito** di aperti è un aperto.

  L'intersezione di una qualsiasi famiglia di chiusi è un chiuso. L'unione di un numero **finito** di chiusi è un chiuso.

- Esempi.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 10.1, 10.2, 10.3.3.

---

20 marzo 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- **Insieme limitato di $\mathbb{R}^N$.**
- **Teorema di Weierstrass** in $\mathbb{R}^N$ (s.d.).
- Esempi di applicazione
- **Insieme connesso per archi** (la definizione esatta di curva verrà data più avanti).
- **Teorema di esistenza degli zeri** (s.d.)
- **Teorema dei valori intermedi.**
- **Direzione. Derivata direzionale di una funzione.** Significato geometrico.
- Esempio: calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,4)$, dove $f(x,y) = x^2y$ e $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(-3,4)$.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 10.1, 10.3.1, 11.1.

---

23 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Derivate parziali.**
- Esercizio: calcolare le derivate parziali di $f(x,y) = x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}$.
- Esercizio: calcolare le derivate parziali di $f(x,y,z) = z\ \mathrm{sen}(x^2y)$.
- **Gradiente di una funzione.**
- **Osservazione importante:** per funzioni di più variabili non è più vero che la derivabilità in un punto implica la continuità.
- Esempio: La funzione

  $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  è derivabile in tutte le direzioni nell'origine (con derivata nulla), ma non è continua.
- **Funzione differenziabile in un punto. Piano tangente.**
- **Teorema:** Se f è differenziabile in un punto, allora in quel punto è anche derivabile in tutte le direzione. Inoltre in quel punto si ha:

  $$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \nabla f \cdot \mathbf{v}\,.$$

  In particolare i coefficienti che compaiono nella definizione di differenziabilità sono le derivate parziali di f.
- **Osservazione importante:** Il gradiente punta nella direzione di "massima crescenza" della funzione.
- **Equazione del piano tangente** al grafico di una funzione differenziabile.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 11.1, 11.2.

---

25 marzo 2009 *(tutoraggio -1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Al variare del parametro $\alpha > 0$, trovare tutte le soluzioni del problema differenziale

  $$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = 1 \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

  N.B.: Non è un problema di Cauchy.
- Risolvere il problema di Cauchy

  $$\begin{cases} x\,y''(x) - y'(x) = 3x^4 \\ y(2) = \dfrac{2}{5} \\ y'(2) = 20 \end{cases}$$

- Trovare l'integrale generale dell'equazione

  $$x(y')^3y'' = (y')^4 - 2$$

---

25 marzo 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Teorema di esistenza e unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy relativo a equazioni del primo ordine in forma normale (senza dimostrazione).
- Soluzioni locali e soluzioni globali.
- Confronto con le equazioni differenziali lineari.
- Le funzioni di due variabili $f(x,y)$ che ammettono derivata parziale f_y continua, sono localmente lipschitziane rispetto alla seconda variabile y.

- Concetto di intervallo massimale di definizione della soluzione.
- Teorema di esistenza dell'intervallo massimale (senza dimostrazione).
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.2.

---

26 marzo 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il problema
$$\begin{cases} y'' + 3y = \alpha y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
ammette soluzioni non limitate.
- Trovare l'integrale generale della seguente equazione
$$y' = 2xy - 4xy^2.$$
- Determinare una soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + x^3y^3 + x^3y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
Tale soluzione è unica? Se non lo è trovarne almeno un'altra.
- Determinare una soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sqrt{y-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
Tale soluzione è unica? Se non lo è trovarne almeno un'altra.
- Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \log y}{x} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

---

26 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Piano tangente al grafico di una funzione differenziabile.**
- Esercizio: Verificare la differenziabilità della funzione $f(x, y) = xy^2$ nel punto $(2, 1)$ e trovare il piano tangente al grafico in quel punto. Calcolare la derivata direzionale in quel punto lungo la direzione individuata dal vettore $(-4, 3)$.
- **Teorema:** la differenziabilità implica la continuità.
- **Teorema del differenziale totale** (s.d.).
- Funzioni di classe $C^1(D)$.
- Schema delle implicazioni tra regolarità C^1, differenziabilità, continuità, derivabilità.
- **Proposizione:** Somma, prodotto, rapporto, composizione di funzioni differenziabili (risp. di classe C^1) sono differenziabili (risp. di classe C^1) (s.d.).
- Esempi.
- **Teorema di Lagrange (teorema del valor medio)** (s.d.)
- **Punti critici (o stazionari). Punti di massimo e minimo relativo.**
- **Teorema di Fermat (c.n. per gli estremi locali)**
- **Osservazione:** Se $f(\mathbf{x})$ è una funzione continua in un insieme chiuso e limitato D, allora ammette massimo e minimo assoluti in D. Per il teorema di Fermat tali punti devono appartenere ad una delle seguenti categorie:
  1. punti di non derivabilità di f;
  2. punti critici di f;
  3. punti della frontiera di D.
- Esercizio: Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ nell'insieme $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 11.2.

---

27 marzo 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^3+(x+y)(y-3x)$ nel triangolo (chiuso) di vertici $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 8)$.
- Variazione dell'esercizio precedente: trovare estremo superiore ed estremo inferiore di f nel triangolo **aperto** con gli stessi vertici.
- **Funzione 2 volte differenziabile. Derivate parziali del secondo ordine. Funzioni di classe C^2. Derivate parziali di ordine superiore.**
- Esercizio: Calcolare le derivate parziali seconde di $f(x, y) = xe^{xy^2}$.
- **Teorema di Schwarz** (s.d.)
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 11.3.

---

30 marzo 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Problema della classificazione dei punti critici.
- **Punti di massimo relativo, di minimo relativo, di sella.**
- **Esempi importanti:** classificazione dell'unico punto critico di $f(x,y) = x^2 + y^2$, di $f(x,y) = x^2 - y^2$, di $f(x,y) = -x^2 - y^2$
- Esempio: punti critici di $f(x,y) = x^3$.
- **Matrice hessiana.**
- Osservazione: la matrice hessiana è simmetrica.
- **Matrice definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa, non definita.** Esempi.
- **Teorema:** relazione tra matrici definite positive (negative), semidefinite positive (negative) e segno degli autovalori (s.d.)
- Richiami su autovalori di una matrice e metodo per la loro determinazione. Equazione caratteristica.
- **Teorema di classificazione dei punti critici attraverso lo studio della matrice hessiana.**
- Osservazione: Se la matrice hessiana in un punto critico è solo semidefinita positiva (o negativa), allora non si può decidere la natura del punto critico solo dallo studio delle derivate seconde.
- Esempio: $f(x,y) = x^2 - y^4$ ha un punto di sella nell'origine, ma non lo si può capire dalle derivate seconde.
- Esercizio: Trovare e classificare i punti critici di $f(x,y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2)$
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 11.5, 11,6.

---

1 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Data la funzione
$$f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1\,,$$
determinarne i punti critici e classificarli. Dire inoltre se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.
- Esercizio: Trovare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = x^3y - 2y^2 + 3x^2y\,.$$
- Esercizio: Data la funzione
$$f(x,y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2)\,,$$
calcolarne i punti critici e classificarli.
- Trovare e classificare i punti critici di
$$f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y\,.$$

---

1 aprile 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Equazioni differenziali di Bernoulli:
$$y' = \varphi(x)y + \psi(x)y^\alpha\,, \tag{2}$$
dove $\varphi\,, \psi \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
- Verifica delle ipotesi del teorema di esistenza locale e unicità per le equazioni (2).
- Con la sostituzione $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$, le equazioni del tipo (2) si trasformano in equazioni lineari nella variabile z.
- Esempio preso da [4] sulla ricerca di soluzioni globali per equazioni del tipo (2).
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** § 5.54.

---

2 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$xy' = -y^2 \log x - 2y.$$
- Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 3x^2y - \left(3x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} y^2 \\ y(1) = e/4. \end{cases}$$
- Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (\log x)\dfrac{1}{2y} e^{y^2-1} \\ y(e) = \sqrt{2}. \end{cases}$$
- Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali
$$y''' - 2y'' = 3x + 2xe^x$$
e
$$x(y')^3y'' = (y')^4 - 2.$$

---

2 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Teorema (classificazione dei punti critici in dimensione 2)** (s.d. - una parte di questo teorema verrà dimostrata in seguito)
- Data la funzione di due variabili
$$f(x,y) = \ln(8y - 2x^2 - 2y^2)\,,$$
a) determinarne il dominio;
b) individuarne i punti critici;
c) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.
- Trovare e classificare i punti critici di
$$f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)\,.$$
(è un esempio di studio di punti critici a determinante hessiano nullo, mediante lo studio del segno di $f(x,y) - f(x_0,y_0)$).
- Osservazione (s.d.): se una funzione $f(x,y)$ ammette una curva dipunti critici, allora:
  1. f è costante su tale curva;
  2. $\det D^2 f = 0$ su tale curva.
- Studio della derivabilità di
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - (x-1)^2\,.$$
- Grafico di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e più in generale delle funzioni a simmetria radiale, della forma $f(x,y) = h(x^2+y^2)$.
- **Formula di Taylor del secondo ordine con il resto di Peano per funzioni di più variabili** (s.d.).
- Giustificazione del criterio di classificazione dei punti critici mediante lo studio della matrice hessiana.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 11.1, 11.5, 11.6.

---

3 aprile 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Dimostrazione che un punto critico con matrice hessiana definita positiva è di minimo relativo.
- **Curve. Equazioni parametriche di una curva. Sostegno della curva.**
- Esempi di curve piane: circonferenze, ellissi, rette, **curve grafico**.
- Esempio di curve in $\mathbb{R}^3$: elica cilindrica.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 12.1.

---

6 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esempio di curva di $\mathbb{R}^3$: equazioni parametriche di una retta passante per due punti assegnati.
- **Curve chiuse, semplici, curve di Jordan.**
- **Curve di classe C^1. Vettore velocità e derivata di una funzione a valori vettoriali. Curve regolari.** Significato della regolarità: **versore tangente ad una curva**
- Esercizio: verifica della regolarità di $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.
- Regolarità di curve grafico.
- **Retta tangente ad una curva.**
- **Curve piane in coordinate polari. Curve nella forma $\rho = \rho(\theta)$.** Condizione di regolarità per curve della forma $\rho = \rho(\theta)$.
- Esempio: cardioide.
- **Lunghezza di una curva di classe C^1.**
- Esercizio: Lunghezza di una circonferenza.
- Lunghezza di una curva grafico.
- Esercizio: lunghezza della parabola $y = x^2$, $x \in [0,b]$.
- Esercizi per casa: lunghezza della cardioide e di una spira di elica cilindrica.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.1, 12.2.

---

8 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Data la funzione $f(x,y) = |x|e^y$, studiarne dominio, continuità, differenziabilità, e calcolarne le derivate direzionali, ove esistono.
- Data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
studiarne dominio, continuità, differenziabilità, e calcolarne le derivate direzionali, ove esistono.
- Trovare e classificare i punti critici di
$$f(x,y) = (x^4 - y^4)\, e^{x^2-y^2}$$
(incompleto - da terminare a casa).

---

8 aprile 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Metodo di Frobenius per determinare una soluzione analitica di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Esempi:
  1. equazione dell'oscillatore armonico;
  2. equazione di Bessel di ordine zero.
- Sistemi 2×2 di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti: per derivazione ci si riconduce a determinare l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.7.4.

---

15 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Data la curva piana di equazione in coordinate polari $\rho = 1 - \theta^2$, $\theta \in [-1, 1]$, disegnarne il sostegno, verificare che è regolare, chiusa e semplice, e infine calcolarne la lunghezza.
- Trovare massimi e minimi relativi della funzione
$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1\,.$$
- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y''' - y'' + 3y' + 5y = xe^{-x} + 5\,.$$

---

15 aprile 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Equazioni differenziali omogenee.
- Cenni di analisi qualitativa delle soluzioni di equazioni del primo ordine in forma normale.
- Teorema di esistenza globale delle soluzioni di equazioni del primo ordine in forma normale (senza dimostrazione).
- Equazioni lineari di Eulero del secondo ordine.
- Esempi ed esercizi vari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** §§ 4.46, 4.49. **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 16.2, 16.7.2.

---

16 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$x^2 y'' - \frac{x}{3} y' + \frac{1}{3} y = x^\alpha.$$
- Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta come soluzioni le seguenti funzioni
$$x^2 e^x \qquad \text{e} \qquad e^x \sin(3x).$$
- Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} (1 - x^2) y'' - 2xy' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

---

16 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Curve rettificabili. Lunghezza di una curva.**
- Osservazione: non tutte le curve continue sono rettificabili. Ad esempio, il grafico di
$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
non ha lunghezza finita (cenno della dim.)
- **Teorema:** Una curva γ di classe $C^1([a, b])$ è rettificabile e la sua lunghezza vale
$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt\,.$$
(s.d., ma giustificazione euristica della formula).
- Esempio: lunghezza di un arco di **cicloide**, di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y(\theta) = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$
(la curva cicloide è la curva percorsa da un punto su una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta).
- Esempio: lunghezza di una spira di elica cilindrica, e giustificazione del risultato ottenuto.
- Esercizio per casa: calcolare la lunghezza di una cardioide.
- Esercizio per casa: calcolare la lunghezza dell'asteroide di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

- **Curve equivalenti. Cambiamento di parametrizzazione. Curve con lo stesso verso, o con verso opposto**
- Esempi.
- **Proposizione:** Curve equivalenti (con lo stesso verso o verso opposto) hanno la stessa lunghezza.
- **Integrali curvilinei di una funzione scalare (di 1^a specie)**
- Esempio: calcolare $\int_\gamma x^2y^2\,ds$, dove γ è la circonferenza unitaria.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.1.1, 12.2, 12.3.

---

17 aprile 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Interpretazione dell' integrale curvilineo come massa di un filo con densità lineare variabile.
- Esercizio: calcolare la massa di una molla a forma di spira d'elica cilindrica, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t \\ z(t) = at \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

  supponendo che la densità lineare della molla in ogni punto sia pari al quadrato della distanza dall'origine.
- Esercizio: Calcolare $\int_\gamma xy\,ds$, dove γ è la parte dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ che si trova nel primo quadrante.
- **Ascissa curvilinea.** Significato geometrico. Parametrizzazione di una curva rispetto all'ascissa curvilinea.
- **Baricentro di una curva.**
- Esercizio: calcolo del baricentro di una semicirconferenza.
- **Momento di inerzia di una curva rispetto ad una retta (rispetto ad un punto, rispetto ad un piano).**
- Esercizio: Calcolo del momento di inerzia rispetto all'asse z della molla descritta poco sopra.
- **Forme differenziali lineari. Campi vettoriali.**
- **Integrale curvilineo (di seconda specie) di una forma differenziale. Lavoro di un campo vettoriale.** Esempi
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.3, 12.4.

---

20 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$ (oppure, il che è lo stesso, l'integrale della forma differenziale $\omega = \sqrt{y}\,dx + (x^3 + y)\,dy$) lungo la curva $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$.
- Esercizio: calcolare il lavoro dello stesso campo vettoriale lungo la curva $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.
- Osservazione: gli esercizi precedenti mostrano che in generale l'integrale di una forma differenziale non dipende solo dagli estremi del percorso, ma anche dal percorso effettivamente seguito.
- **Campi vettoriali conservativi in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Potenziale di un campo vettoriale. Forme differenziali esatte in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Primitiva di una forma differenziale. Differenziale di una funzione scalare.**
- **Teorema:** Calcolo dell'integrale di una forma differenziale esatta (o di un campo vettoriale conservativo).
- Esercizio: calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t^2 - \mathrm{sen}\,\pi t, t^5)$, $t \in [0, 1]$, mediante il calcolo di un potenzale del campo.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.4, 12.4.1.

---

22 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Disegnare la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos^2 t \\ y(t) = -\,\mathrm{sen}^3\,t \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]\,,$$

  dire se è regolare, e calcolarne la lunghezza.
- Disegnare la curva γ del piano xy che si scrive, in coordinate polari, $\rho = |\,\mathrm{sen}\,3\theta|$, $\theta \in [0, \pi]$. E' una curva regolare?
- Trovare il baricentro di mezza cardioide, di equazione in coordinate polari $\rho = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

---

22 aprile 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Funzioni periodiche.
- Polinomi trigonometrici.
- Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo 2π.
- Giustificazione della forma dei coefficienti di Fourier.
- Funzioni continue o regolari a tratti su $\mathbb{R}$.
- Teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier (senza dimostrazione).
- **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** § 1.8.

---

23 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Trovare tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + \dfrac{v(x)}{2} - 4x \\ v'(x) = -10u(x) + 5v(x) - 2e^x \end{cases}$$

- Si faccia uno studio qualitativo del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\cos y \\ y(0) = a \end{cases}$$

  al variare di $a \in \mathbb{R}$.

- Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y''(x) = (1-2x)y'(x) \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

---

23 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Dimostrazione del teorema sull'integrazione delle forme differenziali esatte. Si basa sul seguente:
- **Teorema (derivata di funzione composta):** Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ aperto, I un intervallo. Se $\gamma(t) : I \to E$ è una curva di classe C^1, e $f : E \to R$ di classe C^1, allora

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,.$$

  (s.d.)

- **Corollario:** L'integrale di una forma differenziale esatta (o di un campo vettoriale conservativo) lungo una curva chiusa vale zero.
- **Forme differenziali chiuse. Campi vettoriali irrotazionali.** Esempi.
- **Teorema:** Una forma differenziale C^1 esatta è chiusa. Un campo conservativo C^1 è irrotazionale.
- **Osservazione ed esempio importanti:** Non vale il viceversa: la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

  è chiusa ma non esatta nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- **Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.**
- Osservazione: Se U è un potenziale di ω, anche $U + c$ lo è.
- **Aperto connesso (per archi)** di $\mathbb{R}^N$.
- **Proposizione** Sia ω una forma differenziale esatta in E aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Se U_1 e U_2 sono due primitive di ω su E, allora esse differiscono per una costante.
- Osservazione. La stessa dimostrazione mostra che una funzione di più variabili che abbia un'intera curva fatta di punti critici è costante su tale curva.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 11.7, 12.4, 12.4.1.

24 aprile 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Osservazione: L'integrale di seconda specie si può scrivere anche come integrale di prima specie: Infatti

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds\,,$$

  dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale associato a ω, mentre $\mathbf{T}$ è il versore tangente della curva.

- **Curve C^1 a tratti.**
- **Teorema (teorema di caratterizzazione delle forme esatte).** (cenno della dim.)
- **Aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^n$.** Esempi.
- **Teorema:** Una forma differenziale di classe C^1 e chiusa in un aperto semplicemente connesso è anche esatta (la dim. verrà fatta successivamente, quando verranno studiate le formule di Gauss-Green).
- Esercizio: Dire a priori se la forma differenziale

$$\omega = (3x^2y + xy^2 + 2)\,dx + (x^3 + x^2y - 1)\,dx$$

  è esatta nel suo dominio, e in tal caso cercarne un potenziale.

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.4.2.

---

27 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Trovare tutte le costanti $a, b \in \mathbb{R}$ che rendono conservativo nel suo dominio il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{ay}{1+x^2y^2} + \frac{2x}{1+x^2}\,,\ \frac{x}{1+x^2y^2} - b\cos y\right),$$

e per tali valori trovare il potenziale che vale 5 nel punto $(1,0)$.

- Un metodo per trovare una primitiva $U(x,y)$ di una forma differenziale $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ consiste nell'osservare che deve essere $U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + g(y)$. Supponendo di saper calcolare il primo integrale, poi si impone che la derivata parziale rispetto alla y della funzione così trovata sia uguale a $B(x,y)$. Questo conduce a trovare $g'(y)$, e quindi per integrazione anche $g(y)$.

- Osservazione: il metodo sopra descritto funziona quando le intersezioni del dominio di ω con le rette $y =$ costante sono intervalli. Ad esempio, il metodo ci porterebbe a dire che se $A(x,y) \equiv 0$, allora $U(x,y)$ dipende solo dalla y. Ma questo è FALSO su un generico aperto connesso. Ad esempio, consideriamo la funzione di classe C^1

$$U(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ y^2 & \text{se } y \ge 0,\ x > 0 \\ -y^2 & \text{se } y \ge 0,\ x < 0, \end{cases}$$

definita su $\mathbb{R}^2$ privato del semiasse positivo dell'asse y. Il suo differenziale vale

$$\omega = dU = 0\,dx + B(x,y)\,dy\,,$$

dove

$$B(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 2y & \text{se } y \ge 0,\ x > 0 \\ -2y & \text{se } y \ge 0,\ x < 0. \end{cases}$$

Tuttavia non si può dire che U non dipende da x: ad esempio $U(1,1) \ne U(-1,1)$.

- Esercizio: Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \left(1 - \frac{y}{x}\right) e^{y/x}\,dx + e^{y/x}\,dy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (5 + \cos(t\pi)\,,\, t^2+1)$, $t \in [0,1]$ (si osservi che il calcolo diretto è complicato).

- Esercizio: Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \left(1 - \frac{y}{x}\right) e^{y/x}\,dx + e^{y/x}\,dy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (5 + \cos(t\pi)\,,\, t^2+1)$, $t \in [0,1]$ (si osservi che il calcolo diretto è complicato).

- Esercizio: verificare a priori che la forma differenziale

$$\omega = (2xyz + y^2z - y + 2z)\,dx + (x^2z + 2xyz - x - 4)\,dy$$
$$+(x^2y + xy^2 + 2x - 1)\,dz$$

è esatta nel suo dominio, e successivamente calcolarne i potenziali.

- Come procedere nel caso di una forma differenziale chiusa in un aperto di $\mathbb{R}^2$ con una lacuna (ad esempio: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)? In tal caso il dominio non è semplicemente connesso. Tuttavia in questo caso è sufficiente calcolare l'integrale lungo **una sola** curva di Jordan (ad esempio una circonferenza) che gira intorno alla lacuna. Se il risultato è zero, la forma differenziale è esatta nel suo dominio, altrimenti no.

- Giustificazione della precedente affermazione, basata sul teorema di caratterizzazione delle forme differenziali esatte.

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 12.4.2.

---

29 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x\,(x^2+y^2)\,dx + y\,(x^2+y^2)\,dy}{x^2+y^2-1}\,,$$

dire se è esatta nell'aperto

$$A = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 > 1\right\},$$

e in tal caso calcolarne una primitiva.

- Esercizio: Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy\,,$$

dire se è esatta nel suo dominio, e in tal caso calcolare la primitiva che nel punto $(1,1)$ assume il valore 2.

---

29 aprile 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Teorema sulla convergenza in media quadratica delle serie di Fourier (senza dimostrazione).
- Disuguaglianza di Bessel (senza dimostrazione).
- Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo $T > 0$.
- Serie di Fourier di funzioni pari e di funzioni dispari.

- Rappresentazione complessa delle serie di Fourier.
- Esercizi sull'applicazione del teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, con riferimento anche alla determinazione della somma di note serie convergenti.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 16.2. **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** § 1.8.

---

30 aprile 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Si faccia uno studio qualitativo del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y-x)\sin y \\ y(0) = a \end{cases}$$
al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione f, definita su tutto $\mathbb{R}$, dispari, periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \pi - x$ per $x \in (0, \pi]$ e studiarne la convergenza puntuale.
- Calcolare la serie di Fourier della funzione definita da $f(x) = x^2$ per $x \in (-\pi, \pi]$, prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$ e dire quanto vale la sua somma. Alla luce di quanto trovato dire se vale
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

---

30 aprile 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Osservazione:** una forma chiusa ω è sempre **localmente** (cioè: in un intorno di un dato punto tutto contenuto nel dominio di ω) esatta. Anzi' è sempre esatta in ogni sottinsieme semplicemente connesso del dominio. Ad esempio, la forma differenziale
$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\,,$$
che è chiusa ma **non esatta** nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, in realtà è esatta nel semipiano $x > 0$. Una sua primitiva in questo insieme è data da
$$U(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$
Si verifica facilmente che la funzione
$$U(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0\,,\ y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
è una primitiva sul piano privato del semiasse negativo delle y. Si verifica anche facilmente che la U così definita non è altro che l'angolo θ che si utilizza nelle usuali coordinate polari. E' anche chiaro che questa funzione **non si può estendere** a tutto il dominio di ω.
- Introduzione agli integrali multipli.
- **Integrale doppio di Riemann su rettangoli di $\mathbb{R}^2$. Funzioni integrabili su rettangoli.**
- **Teorema:** Una funzione continua su un rettangolo chiuso è integrabile (s.d.).
- Esempio di funzione limitata ma **non integrabile** in un rettangolo: la funzione di Dirichlet
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{se } (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$
non è integrabile in $[0,1]^2$.
- **Teorema: principali proprietà dell'integrale** (s.d.).
- **Teorema (formule di riduzione per il calcolo degli integrali doppi su rettangoli)** (s.d.)
- Esercizio: Calcolare
$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} \ln(1+x+2y)\,dx\,dy\,.$$
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 14.1.

---

4 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Significato geometrico delle formule di riduzione: calcolo del volume di un solido affettandolo parallelamente a un piano e integrando le aree delle "fettine" ottenute.
- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_Q x^3 e^{yx^2}\,dx\,dy$, dove $Q = [1,2] \times [1,3]$. Si osservi che in questo caso è cruciale scegliere bene l'ordine di integrazione.
- Esercizio: Calcolare
$$\iint_Q \frac{y}{\sqrt{x^2+2y^2}}\,dx\,dy$$
dove $Q = [1,2] \times [0,1]$.
- **Integrali su insiemi non rettangolari del piano. Funioni integrabili secondo Riemann su un insieme. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Misura di un insieme misurabile.**

- **Esempio importante:** L'insieme $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ non è misurabile secondo Peano-Jordan.
- **Teorema:** Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile e ha misura nulla. (s.d.)
- **Teorema (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla):** Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ è di misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di rettangoli $Q_i, i = 1, \ldots, N_\varepsilon$ tali che

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |Q_i| < \varepsilon\,.$$

  (s.d.)
- Esempio: Un punto ha misura nulla.
- Esempio: Un insieme finito ha misura nulla.
- Esempio: Un segmento ha misura nulla.
- Esempio: Un grafico di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ha misura nulla (s.d.).
- Esempio: Il sostegno di una curva regolare ha misura nulla (s.d.).
- Esempio: Il sostegno di una curva regolare ha misura nulla (s.d.).
- **Teorema:** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$. Allora graf f ha misura nulla. (solo giustificazione non rigorosa).
- **Proposizione:**
  1. Se $E \subset \mathbb{R}^2$ ha misura nulla, allora ogni sottoinsieme di E ha misura nulla.
  2. L'unione (e l'intersezione) di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile.
  3. Se Ω e Ω_1 sono misurabili, con $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, e $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, allora si ha anche $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$.
  4. L'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

  (s.d.)
- **Teorema:** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora è integrabile in Ω. (s.d.)
- **Teorema:** La stessa conclusione del teorema precedente vale supponendo solo che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sia limitata in Ω, e continua eccetto su un insieme di misura nulla. (s.d.)
- **Insiemi semplici (o normali) rispetto alla y (rispetto alla x).**
- **Osservazione:** Un insieme semplice è misurabile. **Formula per la sua misura.**
- **Teorema:** Formule di riduzione per integrali su domini semplici.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.2, 14.2.1.

---

6 maggio 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'''(x) - (\alpha + 3)y''(x) + 3\alpha y'(x) = 5.$$

- Calcolare

$$\int\int_D (2x + 3y)\,dx\,dy$$

  dove D è la regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = x$.
- Calcolare

$$\int\int_T e^{y^2}\,dx\,dy$$

  dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$.
- Sia D l'area del piano compresa tra la retta $y = 2x - 1$ e la parabola $f(x) = 2 - x^2$. Calcolare

$$\int\int_D 2xy\,dx\,dy.$$

  (Solo impostato, lasciato per esercizio)

---

6 maggio 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Funzioni implicite.
- Teorema di Dini o delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^2$ per funzioni di classe C^1.
- Esistenza della derivata delle funzioni implicite (senza dimostrazione).
- Espressione della derivate prima delle funzioni implicite dedotta dalla regola della catena.
- Espressione della derivata seconda delle funzioni implicite ottenuta per derivazione.
- Punti regolari.
- Esempi di funzioni con punti regolari e con punti non regolari.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 13.1.3.

---

7 maggio 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_A \frac{x}{1+y+x}\,dx\,dy$, dove
$$A = \big\{(x,y) \;:\; x \geq 0\,,\; 3x \leq y \leq x+1\big\}\,.$$
- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_A (x+y)\,e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove
$$A = \big\{(x,y) \;:\; |x|+|y| \leq 1\big\}\,.$$
- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_A \sqrt{y^2-x^2}\,dx\,dy$, dove
$$A = \big\{(x,y) \;:\; y \leq 1\,,\; \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{2x}\big\}\,.$$

---

7 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_E xy\,dx\,dy$, dove
$$E = \big\{(x,y) \;:\; y \geq 0\,,\; y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\big\}\,.$$
- Esercizio: Calcolare la misura dell'insieme E definito nell'esercizio precedente.
- Esercizio: Calcolare il volume del tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
- Significato delle formule di riduzione nel calcolo dei volumi.
- **Baricentro di domini piani.**
- Esercizio: Calcolare il baricentro di un semicerchio.
- Esercizio: Calcolare il volume di una palla.
- **Formula per il cambiamento di coordinate negli integrali doppi** (s.d.). **Matrice jacobiana, determinante jacobiano**.
- Verifica che questa è in accordo con la formula di integrazione per sostituzione negli integrali di una variabile.
- **Coordinate polari. Formula per il passaggio a coordinate polari negli integrali doppi.**
- Esercizio: calcolare, mediante il passaggio a coordinate polari, l'integrale $\displaystyle\iint_E y\,dx\,dy$, dove
$$E = \big\{(x,y) \;:\; y \geq 0\,,\; x^2+y^2 \leq R^2\big\}\,.$$
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.3, 14.3.1.

---

8 maggio 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Calcolare il volume della sfera, usando coordinate polari.
- Giustificazione (non rigorosa) della formula di cambiamento di coordinate negli integrali multipli. Significato del determinante jacobiano nel cambio di coordinate.
- Significato del termine ρ che compare nel passaggio a coordinate polari per integrali doppi.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.3, 14.3.1.

---

11 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: calcolare l'area della regione di piano contenuta all'interno della cardioide di equazione $\rho = 1 + \cos\theta$.
- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy$, dove
$$\Omega = \big\{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq 2x\big\}\,.$$
- Esercizio: Calcolare $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove
$$\Omega = \big\{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \geq 2x\,,\; 0 \leq y \leq \sqrt{3}\,(x-1)\,,\; x \in [1,2]\big\}\,.$$
- **Integrali tripli: Partizioni di parallelepipedi, somma inferiore e somma superiore di una funzione limitata su un parallelepipedo, integrale secondo Riemann di funzioni definite su parallelepipedi, integrale secondo Riemann di funzioni definite su insiemi limitati, insiemi misurabili, misura di Peano-Jordan, caratterizzazione degli insiemi misurabili** (s.d.), **integrabilità delle funzioni continue e limitate su un insieme misurabile** (s.d.), **domini semplici rispetto a uno degli assi.**
- **Formule di riduzione per parallelepipedi** (s.d.). **Integrazione per fili o per strati.**
- **Formule di riduzione per domini semplici rispetto ad un asse** (s.d.).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.3, 14.4, 14.4.1.

---

13 maggio 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Disegnare l'insieme

  $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le 1 \ , \ (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 1\}$$

  e scrivere una formula di riduzione per

  $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

  per ogni funzione continua f.

- Esercizio: Disegnare l'insieme D t.c.

  $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2-2x}^{x^2-2x+2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

  per ogni funzione continua f, e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

- Esercizio: Calcolare

  $$\iint_A \max\{x,y\}\,dx\,dy\,,$$

  dove

  $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \le \max\{x,y\} \le 4\,, \ xy > 0\}\,.$$

- Esercizio: Calcolare

  $$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,,$$

  dove

  $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le 1\,, \ y \le x^2\}\,.$$

---

13 maggio 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Curve di livello.
- Retta tangente alla curva di livello.
- Esempio di curva di livello: ellisse.
- Esempio: la lemniscata di Bernoulli.
- Esempio sullo studio dell'insieme degli zeri di una funzione di due variabili attorno ad un suo punto (preso dal sito del prof. Dall'Aglio).
- Teorema di Dini o delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^3$ per funzioni di classe C^1 (senza dimostrazione).
- Esistenza delle derivate parziali delle funzioni implicite (senza dimostrazione).
- Espressione delle derivate parziali delle funzioni implicite dedotta dalla regola della catena.
- Punti regolari.
- Superfici di livello.
- Piano tangente alla superficie di livello.
- Esempio di superficie di livello: sfera.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 13.1.3, 13.1.4.

---

14 maggio 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Calcolare

  $$\int\int_E \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

  dove

  $$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, \ \ x \le y\}\,.$$

- Calcolare

  $$\int\int_E (x+y^2)\,dx\,dy$$

  dove

  $$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, \ \ y \ge 0, \ \ 1 \le x^2+y^2 \le 9\}\,.$$

- Calcolare

  $$\int\int_E \frac{\log(x+y)}{x-y}\,dx\,dy$$

  dove

  $$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le x-1, \ \ x \le 3-y\}\,.$$

---

14 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizi su cambiamenti di variabile "ad hoc":
- Esercizio: Calcolare

  $$\iint_A \sqrt{4x^2+9y^2}\,dx\,dy\,,$$

  dove

  $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2+9y^2 \le 4\,, \ x \ge 0\,, \ y \ge -x\}\,.$$

- Esercizio: Calcolare
$$\iint_A (x+y)\,\log(x-y)\,dx\,dy\,,$$
dove
$$A=\big\{(x,y)\ :\ 1-x\le y\le 3-x\,,\ x-1\le y\le x-1/2\big\}\,.$$

- Esercizio: Calcolare
$$\iint_A e^{\frac{2x-y}{x+3y}}\,dx\,dy\,,$$
dove
$$A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0\,,\ y\ge 0\,,\ 1\le x+3y\le 2\big\}\,.$$

- Esercizio: Calcolare
$$\iint_A \frac{x^3}{y}\,\mathrm{sen}(xy)\,dx\,dy\,,$$
dove
$$A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le y\le 2x\,,\ 1<xy<2\big\}\,.$$

- Osservazione: A volte per calcolare il determinante jacobiano di un cambio di coordinate si può utilizzare la formula della derivata della funzione inversa (che proveremo in seguito): se $\psi\ D\to\psi(D)$ (con $D,\psi(D)\subset\mathbb{R}^2$), è un cambiamento di variabile ammissibile, allora si ha
$$J_\psi(u,v)=\big(J_{\psi^{-1}}(x,y)\big)^{-1}\,,$$
dove $(x,y)=\psi(u,v)$, e il secondo membro indica la matrice inversa di $J_{\psi^{-1}}(x,y)$. Ne segue che
$$\det J_\psi(u,v)=\frac{1}{\det J_{\psi^{-1}}(x,y)}\,.$$

- Esercizio sugli integrali tripli: Calcolare
$$\iiint_A \log(z+y+3)\,dx\,dy\,dz\,,$$
dove A è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,-1)$.

- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.3.2, 14.4.1.

---

15 maggio 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- **Formula per cambiamenti di coordinate negli integrali tripli** (s.d.).
- **Coordinate cilindriche.**
- Esercizio: Calcolare il volume di una palla usando coordinate cilindriche.
- **Baricentro di un solido.**
- Esercizio: Calcolare il baricentro di mezza palla usando coordinate cilindriche.
- Calcolo del volume dei solidi di rotazione: **Teorema di Guldino.**
- Esercizio: Calcolare il volume di un toro (ciambella).
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.4.1, 14.4.2. Per il Teorema di Guldino si può utilizzare [4], § 92.

---

18 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizi sul teorema di Guldino e sull'uso delle coordinate cilindriche:
- Calcolo del volume di un cono.
- Calcolare il volume del solido E costituito dai punti interni alla sfera $x^2+y^2+z^2=25$ ed esterni al cilindro $x^2+y^2=9$.
- Calcolare il volume e il baricentro del "cono gelato" (unione di un cono e di mezza palla) avente angolo al vertice di $\pi/4$ e raggio della palla pari a 2.
- **Coordinate sferiche.**
- Esercizi sull'uso delle coordinate sferiche:
- Calcolo del volume della sfera.
- Calcolo del baricentro di una semi-palla.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 14.4.2.

---

20 maggio 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Calcolare il seguente integrale
$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz\,,$$
dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 3-2y\}$.
- Calcolare il seguente integrale
$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz\,,$$
dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2+y^2 \le \sqrt{z(1-z)}\}$.
- Calcolare il seguente integrale
$$\iiint_T x\,dx\,dy\,dz\,,$$
dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \le 1,\ 0 \le y \le 1-x-z\}$.
- Dato l'insieme
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 8-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\},$$
trovarne il volume. Successivamente calcolare
$$\iiint_E xyz\,dx\,dy\,dz\,,$$
dove $E = \{(x,y,z) \in D : 0 \le y \le x\}$.

---

20 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Esercizio: Calcolo del volume del solido
$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\ x^2-x+y^2 \le 1\big\}\,,$$
sia usando coordinate cilindriche che sferiche.
- Esercizio: Calcolare
$$\iiint_E (2+x^2y^2)\,dx\,dy\,dz\,,$$
dove E è il solido compreso tra il paraboloide $z = x^2+(y-2)^2$ e il piano $z = 7-4y$.
- Esercizio: Detta S la superficie ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico di
$$x = z + \alpha\sqrt[3]{z}\,, \quad z \in [0,1]\,,$$
determinare $\alpha \ge 0$ in modo che l'insieme T delimitato da S e dai piani $z=0$ e $z=1$ abbia volume pari a π.

---

21 maggio 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Data l'equazione
$$y^4\cos x + e^{3x^2} + 4y - 3x + 2 = 0$$
verificare che essa individua in un intorno del punto $(0,-1)$ una funzione di una sola variabile e studiare il comportamento di tale funzione vicino al punto considerato.
- Provare che l'equazione
$$\tan(xy) + xy^2 + y^2 - 4y - 5x^2 + 4 = 0$$
definisce implicitamente una funzione $x = \varphi(y)$ in un intorno del punto $(0,2)$. Studiare il comportamento di $\varphi(y)$ in un intorno di $y = 2$ e determinare il suo polinomio di Taylor di grado 2 centrato in tale punto.
- Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x = 1$ delle funzioni $x \to g(x)$ definite implicitamente da ciascuna delle seguenti equazioni
$$f(x,y) := x^5 - 3x^2y + 3 = f(1,1)\,,$$
$$f(x,y) := \log(xy) - 2x + y = f(1,1).$$

---

21 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Uso di coordinate speciali costruite “su misura”.
- Esercizio: Calcolare
$$\iiint_E x\,dx\,dy\,dz\,,$$
dove E è il cono avente per base il cerchio
$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 \le 4\,,\ z=0\big\}$$
e per vertice il punto $(1,2,5)$. Si può usare il cambio di coordinate
$$\begin{cases} x = (1-t)\rho\cos\theta + t \\ y = (1-t)\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + 2t \\ z = 5t\,, \end{cases}$$
dove $\rho \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $t \in [0,1]$.
- **Cenni sugli integrali impropri in due o tre variabili.**
- Esempio: Calcolare
$$\iint_{B_1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$
dove
$$B_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \le 1\big\}\,.$$

- **Esempio importante:** l'integrale

$$\iint_{B_1} \frac{dx\,dy}{||(x,y)||^\alpha}$$

converge se $\alpha < 2$, diverge se $\alpha \geq 2$.

- **Esempio importante:** l'integrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1} \frac{dx\,dy}{||(x,y)||^\alpha}$$

converge se $\alpha > 2$, diverge se $\alpha \leq 2$.

- **Esempio importante:** l'integrale

$$\iiint_{B_1} \frac{dx\,dy\,dz}{||(x,y,z)||^\alpha}\,,$$

dove

$$B_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^3 \leq 1\right\}.$$

converge se $\alpha < 3$, diverge se $\alpha \geq 3$.

- **Esempio importante:** l'integrale

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{dx\,dy\,dz}{||(x,y,z)||^\alpha}$$

converge se $\alpha > 3$, diverge se $\alpha \leq 3$.

- Esempio: calcolo di

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\,.$$

- Esempio: Calcolo di

$$\iint_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

usando l'esempio precedente.

- Esercizio: Calcolare

$$\iiint_C \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{4/3}}\,dx\,dy\,dz\,,$$

dove C è il cono definito dalle disuguaglianze

$$x^2+y^2 \leq z^2 \leq 4\,,\ z \leq 0\,.$$

- **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** §§ 82.

---

22 maggio 2009 *(1 ora - A. Dall'Aglio)*

- **Domini semplici regolari di $\mathbb{R}^2$. Domini regolari di $\mathbb{R}^2$.**
- Osservazione: la frontiera di un dominio regolare è costituita dall'unione di un numero finito di curve regolari.
- **Orientazione positiva della frontiera di un dominio regolare. Versore tangente e versore normale esterno alla frontiera.**
- **ATTENZIONE:** Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è una parametrizzazione di un tratto di frontiera del dominio (orientata positivamente), allora l'espressione del versore normale esterno è

$$\mathbf{N}(t) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\,,\ \frac{-x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\right)\,,$$

mentre a lezione avevo erroneamente invertito i segni.

- **Formule di Gauss Green per domini normali regolari di $\mathbb{R}^2$.** (, dimostrazione della prima formula solo nel caso di un dominio normale rispetto alla y, cioè semplice rispetto alla x). **Formule di Gauss Green per domini regolari di $\mathbb{R}^2$.**
- **Rotore di un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$.**
- **Teorema di Stokes per domini regolari di $\mathbb{R}^2$.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** § 76.

---

25 maggio 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Interpretazione fisica del rotore di un campo vettoriale piano.
- Dimostrazione del teorema (cfr. lezione del 24 aprile) sull'esattezza delle forme differenziali chiuse in domini semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2$.
- Dimostrazione dell'affermazione (cfr. lezione del 27 aprile) per cui una forma differenziale chiusa in un dominio con una lacuna (per esempio $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine) è esatta se e solo se l'integrale della forma su **una sola** curva di Jordan che gira intorno alla lacuna vale zero.
- **Formule per il calcolo delle aree di domini piani attraverso integrali curvilinei.**
- Esercizio: Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos^2 t \\ y(t) = -\operatorname{sen}^3 t \end{cases}\,,\quad t \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right]\,,$$

calcolare mediante un integrale curvilineo l'area della regione delimitata da γ e dagli assi coordinati.

- Esercizio: Disegnare la curva γ di equazione polare
$$\rho = 2\cos^2\theta\,, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
e, usando il teorema di Stokes, calcolare
$$\iint_D x\,dx\,dy\,,$$
dove D è il dominio delimitato da γ e dall'asse x.
- **Divergenza di un campo vettoriale piano. Flusso di un campo vettoriale uscente da un dominio regolare. Formula per il calcolo del flusso.**
- **Teorema della divergenza in dimensione 2.**
- **Riferimenti sul testo consigliato [4]:** § 76.

---

27 maggio 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Esercizio sull'applicazione del teorema del Dini per funzioni di tre variabili.
- Sistemi di due equazioni in tre incognite: caso lineare.
- Teorema di Dini o delle funzioni implicite per sistemi di due funzioni di classe $C^1(X)$, $X \subset \mathbb{R}^3$ aperto (senza dimostrazione).
- Punti regolari.
- Esempio: date $f, g \in C^1(X)$ determinare la retta tangente alla curva intersezione degli insiemi degli zeri di f e g in prossimità di un loro punto regolare.
- Estremi vincolati di funzioni di due variabili: definizione di punti di massimo e di punti di minimo vincolato.
- Esempio di determinazione degli estremi di una funzione vincolati ad una curva cartesiana.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** §§ 13.1.4, 13.1.5, 13.2.

---

28 maggio 2009 *(2 ore - D. Sforza)*

- Esempio di determinazione degli estremi di una funzione vincolati ad un'ellisse.
- Esempio di determinazione degli estremi di una funzione vincolati ad una curva di classe C^1 a tratti.
- Punti critici o stazionari vincolati.
- I punti di estremo vincolato per una funzione f, regolari per il vincolo Γ, sono punti critici di f vincolati a Γ.
- Teorema del moltiplicatore di Lagrange.
- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- Applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange agli esempi visti in precedenza di determinazione degli estremi vincolati di una funzione.
- Interpretazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange in termini delle curve di livello della funzione f.
- **Riferimenti sul testo consigliato [2]:** § 13.2.

---

1 giugno 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- Interpretazione della divergenza di un campo vettoriale (s.d.):
$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x_0, y_0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{\partial B_r(x_0,y_0)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds\,.$$
- Esercizio: verifica del teorema della divergenza per il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 3y^2\,,\, x^2 + 3y^2)$$
nel dominio
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$
- Esercizio per casa: stesso esercizio, ma prendendo il dominio
$$D_1 = D \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \ge 0\,,\, y \ge 0\right\}.$$
- **Superfici regolari. Varie scritture della condizione di regolarità.** Analogie con le curve regolari.
- **Superfici grafico.**
- Esempio: paraboloide $z = x^2 + y^2$.
- Esempio: sfera.
- Esempio: cilindro circolare retto.
- Esempio: cono circolare retto.
- Esempio: elicoide.
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 94.

---

3 giugno 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Verificare che l'equazione
$$f(x,y,z) = \log\sqrt{1+x^2+y^2} - (z-1)e^z = 0$$
definisce implicitamente $z = g(x,y)$ in un intorno di $(0,0,1)$ e che la funzione così definita ha minimo relativo in $(0,0)$.

- Determinare massimi e minimi della funzione $f(x,y) = x+y-1$ soggetta al vincolo $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x = 0\}$. Stabilire quali, fra i punti di estremo vincolato sono anche punti di massimo o minimo assoluto di f, se esistono, su $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \le 0\}$.

- Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2$ nell'insieme
$$E = \{(x,y,z) : 2x+4y-3z+5 = 0\}.$$

---

3 giugno 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Sostegno di una superficie regolare. Curve coordinate. Significato dei vettori φ_u e φ_v.**

- Altri esempi: ellissoide, superficie cilindrica generica, toro.

- **Versore normale e piano tangente ad una superficie in un punto.**

- Esercizio: determinare versore normale e piano tangente al cono
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 3\rho \end{cases}$$
nel punto $(-2\sqrt{3}, 2, 12)$.

- Osservazione: il versore normale è determinato a meno del segno (cambiando l'ordine dei parametri, cambia la direzione del versore normale).

- Osservazione: Nel caso di una superficie grafico, il piano tangente coincide con quello definito durante lo studio delle funzioni di due variabili.

- Osservazione: il piano tangente ad una superficie in un punto contiene tutti i vettori tangenti alle curve disegnate sulla superficie che passano per quel punto.

- **Area di una superficie.**

- Esempio: area di una sfera.

- Esempio: area di una superficie grafico.

- Esercizio: disegnare la parte di superficie $z = 2y^2$ che ha per proiezione sul piano xy il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,1)$, e calcolarne l'area.

- Esercizio per casa: Calcolare l'area della superficie laterale di un cono circolare retto.

- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 94, 96, 97 .

---

4 giugno 2009 *(tutoraggio - 1 ora - A. Di Castro)*

- Disegnare la curva di equazione parametriche
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$
Utilizzando le formule di Gauss-Green, calcolare
$$\iint_D x^2\,dx\,dy\,,$$
dove D è il dominio racchiuso dalla curva.

- Utilizzando il teorema di Stokes, calcolare l'integrale
$$\int_\gamma (x^2-xy)\,dx + (xy-y^2)\,dy,$$
dove γ è la frontiera del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, percorsa in verso orario.

- Trovare piano tangente e versore normale all'ellissoide $x^2+4y^2+9z^2 = 1$ nel punto $\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

---

4 giugno 2009 *(2 ore - A. Dall'Aglio)*

- **Osservazione importante:** si ha anche
$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{EG - F^2}\,,$$
dove
$$E = |\varphi_u|^2\,, \quad G = |\varphi_v|^2\,, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v\,.$$
Più in generale, per ogni coppia di vettori V, $W \in \mathbb{R}^3$, si ha sempre:
$$|V \wedge W|^2 = |V|^2\,|W|^2 - |V \cdot W|^2\,.$$

- **Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione.** Interpretazione del teorema.

- Esempio: calcolo dell'area della sfera mediante il Teorema di Guldino.

- Esercizio: calcolare l'area del toro.
- **Integrali di superficie. Baricentro di una superficie.**
- Esempi: calcolo del baricentro di una semisfera.
- Esercizio: Calcolare

$$\int_S \frac{1}{[1+4(x^2+y^2)]^3}\, d\sigma\,,$$

dove S è il grafico della funzione $z = 2xy$, e (x, y) variano nel dominio D contenuto nei semipiani $y \geq 0$ e $y \leq -x$, delimitato dalla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine, dall'asse delle x e dalla retta $y = -x$.
- Cenno sui cambiamenti di parametri e sulle superfici equivalenti, e sull'invarianza dei concetti definiti (area, integrali di superficie, piano tangente, versore normale - a meno del segno) rispetto a cambiamenti di coordinate.
- Cenno alle superfici orientabili.
- Esempio di superficie non orientabile: il nastro di Möbius.
- **Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile.**
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 95, 97, 98, 99.

---

5 giugno 2009 *(2,5 ore - A. Dall'Aglio)*

- Espressione del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile.
- Esempio: Sia γ la curva del piano xy di equazione polare

$$\rho = \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,,\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

e sia S il cilindro retto avente per base ga, di altezza $h = 2$, posto nel semispazio $\{z \geq 0\}$. Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z^2)$.
- **Dominio regolare di $\mathbb{R}^3$.**
- Osservazione: la frontiera di un dominio regolare è costituita da un numero finito di superfici regolari.
- **Divergenza di un vettore in $\mathbb{R}^3$.**
- **Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$.**(s.d.)
- Esempio: Dato l'insieme D del piano xz definito da

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq 1\,,\; 2(x-1) \leq z \leq 3(1-x)^3\}\,,$$

sia E il solido contenuto nel semispazio $y \geq 0$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse z. Calcolare il flusso uscente da ∂E del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(2xy^2 + 6zy\,,\; x - y^3\,,\; 4x^2 z\big)\,.$$
- **Cenni sulle superfici con bordo.** Esempi.
- **Orientazione del bordo. Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$.**
- **Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$** (s.d.).
- Esempio: Usando il teorema di Stokes, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z - 2y)\, dx + (z - 2x)\, dy + (x + 3y + y^2)\, dz\,,$$

dove γ è la curva intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e del piano $y = 2z$.
- **Riferimenti sul testo [4]:** §§ 98, 99, 100.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Andreucci, A.M. Bersani: *Risoluzione di problemi d'esame di Analisi Matematica II* - Esculapio/Progetto Leonardo

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: *Analisi Matematica*, McGraw-Hill.

[3] B.P. Demidovich: *Esercizi e Problemi di Analisi Matematica* - Editori Riuniti

[4] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: *Analisi Matematica due*, Liguori editore.

[5] P. Marcellini, C. Sbordone: *Esercitazioni di Matematica, Vol. 2, prima e seconda parte* - Liguori

[6] L. Moschini, R. Schianchi: *Esercizi svolti di Analisi Matematica* - Progetto Leonardo

[7] Gli esercizi disponibili sulla pagina web del corso `http://www.mat.uniroma1.it/~dallaglio/am-aero/`