ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Sia

$$S = \Big\{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 = 4\,,\ 0 \le z \le 3 + x\Big\}\,.$$

Scrivere le equazioni parametriche di una superficie regolare che abbia S come sostegno.

2. Enunciare il teorema della divergenza in $\mathbf{R}^3$.

3. Fare tre esempi di funzioni di due variabili che abbiano nel punto $(0, 1)$, rispettivamente:
a) un punto di minimo relativo;
b) un punto di massimo relativo;
c) un punto di sella.

4. Dire se le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = x^2 \arctan y$$

sono globali oppure no.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. L'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y \leq 16 - x^2\,,\ y \geq 1 - \frac{x}{2} \right\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan? Scrivere una formula per il calcolo di

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

qualunque sia $f(x,y)$ continua in D.

2. Scrivere la definizione di funzione differenziabile di due variabili.

3. Trovare una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine che ammetta $y(x) = 5\,\mathrm{sen}(3x)$ come soluzione. E' possibile fare la stessa cosa per $y(x) = x\ \mathrm{sen}\,x$?

4. Dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 2yy'\,, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \alpha\,, \end{cases}$$

è strettamente crescente nel suo dominio di definizione, comunque si fissi il parametro $\alpha > 0$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Sia T il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,2)$. Scrivere una formula per il calcolo di

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

qualunque sia $f(x,y,z)$ continua in T.

2. Scrivere la definizione di derivata direzionale di una funzione di due variabili. Come si calcola nella pratica per funzioni sufficientemente regolari?

3. Dire per quali α e $\beta \in \mathbf{R}$ è convergente l'integrale

$$\int_0^1 (\operatorname{sen} x)^\alpha\,(\cos x)^\beta\,dx\,.$$

4. Scrivere una parametrizzazione del nastro di Möbius come superficie regolare.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare l'insieme

$$D = \Big\{ (x, y) \ : \ 0 \le y \le \pi \,, \ \operatorname{sen} y \le x \le e^y \Big\} \,,$$

scrivere una formula per il calcolo di

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

qualunque sia $f(x, y)$ continua in D, e invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

---

2. Scrivere la definizione di differenziabilità di una funzione di due variabili. Enunciare un teorema significativo sulle funzioni differenziabili.

---

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^4 \frac{(\operatorname{arctg} x)^\alpha}{x^2} \, dx$$

---

4. Utilizzando il teorema della divergenza, provare che $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ per ogni campo vettoriale $\mathbf{F}$ regolare in $\mathbf{R}^3$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Disegnare l'insieme
$$D = \left\{ (x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x \leq -1 + \frac{|y|}{2} \right\},$$
e scrivere una formula per il calcolo di
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
qualunque sia $f(x,y)$ continua in D.

2. Scrivere le formule di Gauss-Green nel piano e illustrarne un'applicazione significativa.

3. Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta la funzione $f(x) = 5xe^{-2x}$ tra le sue soluzioni.

4. Calcolare
$$\inf_{f \in \mathbf{X}} \iint_{\overline{B}_1} f(x,y)\,dx\,dy\,,$$
dove $\mathbf{X}$ è l'insieme delle funzioni continue e non negative sul cerchio unitario chiuso $\overline{B}_1 \subset \mathbf{R}^2$ che valgono 1 sulla frontiera del cerchio.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare l'insieme

$$D = \Big\{(x, y, z) \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y + 2x \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1\Big\}\,,$$

e scrivere una formula per il calcolo di

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

qualunque sia $f(x, y, z)$ continua in D.

---

2. Cosa si può dire sul rotore del gradiente di una funzione $u(x, y)$ regolare in $\mathbf{R}^2$?

---

3. Scrivere l'integrale generale di una generica equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti.

---

4. Dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \operatorname{sen}^2 x}{x^2 + y^2}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \ : \ y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \geq 1\,,\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\},$$

e scrivere una formula per il calcolo di

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

qualunque sia $f(x,y)$ continua in D.

---

2. Che cos'è un campo vettoriale conservativo? Fare un esempio significativo.

---

3. Descrivere il metodo di variazione delle costanti per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

---

4. Dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,\mathrm{tg}\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare il cono circolare retto D avente per vertice l'origine dello spazio cartesiano, e per base il cerchio

$$C = \Big\{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2 \leq 4 \ , \ z=3\Big\} ,$$

e scrivere una formula per il calcolo di

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

qualunque sia $f(x,y,z)$ continua in D.

---

2. Enunciare il teorema delle funzioni implicite in dimensione 2.

---

3. Trovare un'equazione differenziale lineare del primo ordine tale che tutte le sue soluzioni tendano a zero per $x \to +\infty$.

---

4. Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma differenziale chiusa definita in $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$. Quanti valori diversi può assumere $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è una curva di Jordan con sostegno contenuto in D?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Scrivere una parametrizzazione come superficie regolare della superficie S ottenuta facendo ruotare il grafico di $z = \sqrt{x}$ $(1 < x < 2)$ intorno all'asse z, e scrivere una formula per il calcolo di

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma$$

per ogni funzione continua $f(x, y, z)$.

---

2. Enunciare e spiegare la definizione di funzione differenziabile in un punto.

---

3. Enunciare il criterio di convergenza assoluta per integrali impropri (con almeno un esempio).

---

4. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x + 2y}$$

ammette limite nell'origine.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare il solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse z la regione

$$C = \left\{ (x, z) \ : \ 0 \leq z \leq 3 + 2x - x^2 \ \right\}$$

del piano xz, e trovarne il volume.

---

2. Dire se la funzione $f(x, y) = x^2 y - 4x - y^2$ è differenziabile nel punto $(1, 1)$. Trovare il piano tangente e il versore normale al grafico della funzione nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

---

3. Enunciare il teorema del confronto tra serie e integrali impropri.

---

4. Dire se la funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

ammette limite per $(x, y) \to \infty$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare e illustrare la condizione di **regolarità** di una superficie regolare.

2. Trovare una formula per il volume del solido A definito da

$$A = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 \leq f(z)\,, |z| \leq 2\}\,,$$

dove $f(z)$ è una generica funzione reale, continua e positiva.

3. Verificare la formula per la lunghezza di una circonferenza.

4. Usando la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

mostrare che $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. Perché ciò non contraddice il teorema di Schwarz?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la formula per i coefficienti della serie di Fourier di una funzione periodica e mostrare cosa succede se la funzione è dispari.

---

2. Disegnare il solido A definito da

$$A = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\,, -(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}\,,$$

e trovare una formula per l'integrale triplo

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

dove $f(x, y, z)$ è una generica funzione continua.

---

3. Verificare la classica formula per l'area della superficie laterale di un cono circolare retto.

---

4. Una funzione $f \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ si dice semi-continua inferiormente se per ogni $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbf{R}^2$ e per ogni successione $\{(x_n, y_n)\}$ convergente a $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbf{R}^2$ e tale che esista $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$, si ha

$$f(\overline{x}, \overline{y}) \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)\,.$$

Fare un esempio di una funzione semi-continua inferiormente ma non continua.

ANALISI MATEMATICA II PROVA DI TEORIA (21/7/2010)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di funzione differenziabile. La funzione $f(x,y) = x^2 + \sqrt{x^2+y^2}$ è differenziabile in tutti i punti?

---

2. Disegnare l'insieme $C = A \cup B$, dove

$$A = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 1\}\,, \qquad B = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 2x\}\,,$$

e calcolarne l'area.

---

3. Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea che abbia per soluzioni

$$y_1(x) = 5e^{3x}\cos x\,, \qquad y_2(x) = e^{3x}\operatorname{sen} x\,, \qquad y_3(x) = 2y_1(x) - y_2(x)\,.$$

---

4. Dire se esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

ANALISI MATEMATICA II PROVA DI TEORIA (6/9/2010)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione di più variabili. Calcolare, se esiste, la derivata direzionale di $f(x,y) = \sqrt{x^2 + |y|}$ lungo la direzione del vettore $(1,2)$ in ciascuno dei punti $(0,-1)$ e $(0,0)$.

2. Calcolare la posizione del baricentro di un semicerchio.

3. Dire come si risolvono le equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.

4. Dire se esiste $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2 + y^4 - xy^2)$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Che cos'è una funzione differenziabile di due variabili? Date prima la definizione, e successivamente un'interpretazione geometrica.

2. Calcolare la posizione del baricentro di una semicirconferenza.

3. Disegnare l'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \geq 1\,,\ x+y \leq 2\right\},$$

e scrivere una formula per il calcolo dell'integrale

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

valida per ogni funzione continua $f(x,y)$.

4.