Primo compito: fila $\diamondsuit$

1. L'integrale generale è il seguente:

i) Se $\alpha < \frac{1}{2}$ opp. $\alpha > \frac{3}{2}$: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{e^{-t}}{6-4\alpha}$, con $\lambda_{1,2} = 2(1-\alpha) \pm \sqrt{4(\alpha-1)^2 - 1}$;

ii) se $\alpha = \frac{1}{2}$: $y(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + \frac{e^{-t}}{4}$;

iii) se $\alpha = \frac{3}{2}$: $y(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2})$;

iv) se $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$:

$$y(t) = e^{2(1-\alpha)t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \operatorname{sen}\beta t) + \frac{e^{-t}}{6-4\alpha},$$

con $\beta = \sqrt{1 - 4(\alpha-1)^2}$.

Nelle formule precedenti c_1 e c_2 sono arbitrarie costanti reali. La proprietà richiesta è verificata se e solo se $\alpha > 1$.

---

2. a) La serie di Fourier vale

$$\frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\Big(\cos\frac{k\pi}{2} - 1\Big)\cos kx.$$

La serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la sua somma vale $f(x)$.
b) Prendendo $x = 0$, si ottiene

$$\frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\Big(\cos\frac{k\pi}{2} - 1\Big) = 0.$$

Osservando che

$$\cos\frac{k\pi}{2} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 4h,\ h \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{se } k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}, \\ -2 & \text{se } k = 4h+2,\ h \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

si ottiene

$$\frac{3}{8}\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{(4h+2)^2} = 0$$

(si osservi che tutte le serie convergono, quindi il passaggio è lecito). Da qui, con semplicissimi calcoli, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

---

3. La prima forma è chiusa nel suo dominio $\mathbb{R}^2$, quindi è esatta. Le sue primitive sono date da

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + 3y) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La seconda forma è chiusa nel suo dominio $\mathbb{R}^2$, essendo

$$\frac{\partial}{\partial y}[2x\, f(x^2+3y)] = \frac{\partial}{\partial x}[3\, f(x^2+3y)] = 6x\, f'(x^2+3y),$$

quindi è esatta. Le sue primitive sono date da

$$U(x,y) = F(x^2+3y) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

dove $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$.

---

4. Il baricentro è il punto $\big(\frac{28}{15\pi}, \frac{1}{5}\big)$.

---

5. a) Una parametrizzazione possibile è la seguente:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = -\dfrac{1}{\rho} \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \in [1,2]\times[0,2\pi].$$

b) Il versore normale nel punto indicato è

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{97}}(-2, 2\sqrt{3}, -9).$$

c) Con il teorema di Guldino per le superfici di rotazione si ottiene

$$\text{Area}(S) = \pi\left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Bigg|_{t=\sqrt{2}}^{t=\sqrt{17}}.$$

Secondo compito: fila $\clubsuit$

1. L'integrale generale è il seguente:

i) Se $\alpha < \frac{3}{2}$ opp. $\alpha > \frac{5}{2}$: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{e^{-t}}{10-4\alpha}$, con $\lambda_{1,2} = 2(2-\alpha) \pm \sqrt{4(\alpha-2)^2 - 1}$;

ii) se $\alpha = \frac{3}{2}$: $y(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + \frac{e^{-t}}{4}$;

iii) se $\alpha = \frac{5}{2}$: $y(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2})$;

iv) se $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$:

$$y(t) = e^{2(2-\alpha)t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \operatorname{sen}\beta t) + \frac{e^{-t}}{10-4\alpha},$$

con $\beta = \sqrt{1 - 4(\alpha-2)^2}$.

Nelle formule precedenti c_1 e c_2 sono arbitrarie costanti reali. La proprietà richiesta è verificata se e solo se $\alpha > 2$.

---

2. a) La serie di Fourier vale

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big((-1)^k - \cos\frac{k\pi}{2}\Big)\cos kx.$$

La serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la sua somma vale $f(x)$.
b) Prendendo $x = 0$, si ottiene

$$\frac{5}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big((-1)^k - \cos\frac{k\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Osservando che

$$(-1)^k - \cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 4h,\ h \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{se } k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}, \\ 2 & \text{se } k = 4h+2,\ h \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

si ottiene

$$\frac{5}{8}\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{(4h+2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(si osservi che tutte le serie convergono, quindi il passaggio è lecito). Da qui, con semplicissimi calcoli, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

---

3. La prima forma è chiusa nel suo dominio $\mathbb{R}^2$, quindi è esatta. Le sue primitive sono date da

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}(5x - y^2) + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

La seconda forma è chiusa nel suo dominio $\mathbb{R}^2$, essendo

$$\frac{\partial}{\partial y}[5\,f(5x-y^2)] = \frac{\partial}{\partial x}[(-2y)\,f(5x-y^2)] = -10y\,f'(5x-y^2)\,,$$

quindi è esatta. Le sue primitive sono date da

$$U(x,y) = F(5x - y^2) + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$

dove $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$.

---

4. Il baricentro è il punto $\left(-\frac{1}{6}, \frac{14}{9\pi}\right)$.

---

5. a) Una parametrizzazione possibile è la seguente:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\operatorname{sen}\theta \\ z = \dfrac{1}{\rho} \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \in [1,3]\times[0,2\pi]\,.$$

b) Il versore normale nel punto indicato è

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{17}}(\sqrt{3}, 1, 8)\,.$$

c) Con il teorema di Guldino per le superfici di rotazione si ottiene

$$\text{Area}(S) = \pi\left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Bigg|_{t=\sqrt{2}}^{t=\sqrt{82}}\,.$$
