CALCOLO DIFFERENZIALE - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA ♣ (19/7/2007)

Cognome e nome...

Se ammesso, desidererei sostenere la prova orale:

◯ 24–25 luglio; ◯ 26–27 luglio; ◯ 30–31 luglio.

Note...

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(\frac{2x^2y - 3 - 3x^4y^2}{x\,(1+x^4y^2)}\,,\ \frac{x^2}{1+x^4y^2}\Big)$$

quando agisce su un punto che si muove lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}\big(\dfrac{\pi(8-t^2)}{16}\big)\,, \\ y(t) = t^3 - t^2 - t\,, \end{cases} \qquad t \in [0,2]\,.$$

Suggerimento: il calcolo diretto è sconsigliato. *(9 punti)*

---

2. Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = 2x - yz$$

nell'ellissoide

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 \le 64\,.$$

(8 punti)

---

3. Dato l'insieme D del piano xz definito da

$$D = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ 2(x-1) \le z \le 3(1-x)^3\}\,,$$

sia E il solido contenuto nel semispazio $y \ge 0$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse z. Calcolare:

a) il volume di E;

b) il flusso uscente da ∂E del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2xy^2 + 6zy\,,\ x - y^3\,,\ 4x^2z\big)\,.$$

(10 punti)

---

4. Trovare tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + \dfrac{v(x)}{2} - 4x\,, \\[2mm] v'(x) = -10\,u(x) + 5\,v(x) - 2e^{2x}\,. \end{cases}$$

(9 punti)

1) Il campo $\underline{F}$ è definito nei due semipiani $\{x<0\}$ e $\{x>0\}$, ciascuno dei quali è semplicemente connesso.

Si verifica facilmente che $\operatorname{rot} \underline{F} \equiv 0$, quindi $\underline{F}$ è conservativo in ciascuno dei due semipiani.

I potenziali di $\underline{F}$ sono

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 y) - 3 \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (*)$$

La curva γ è contenuta nel semipiano $\{x>0\}$, e va dal punto $(1,0)$ al punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$.

Pertanto il lavoro vale

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right) - U(1,0) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln 2 .$$

2) Gli estremi assoluti esistono per il teorema di Weierstrass. Poiché f non ammette punti critici, gli estremi dovranno stare sulla frontiera, e risolveranno il seguente sistema (teorema dei moltiplicatori di Lagrange)

$$\begin{cases} +2 = 2\lambda x \\ -z = 4\lambda y \\ -y = 8\lambda z \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 64 \end{cases}$$

Questo sistema ammette 6 soluzioni:

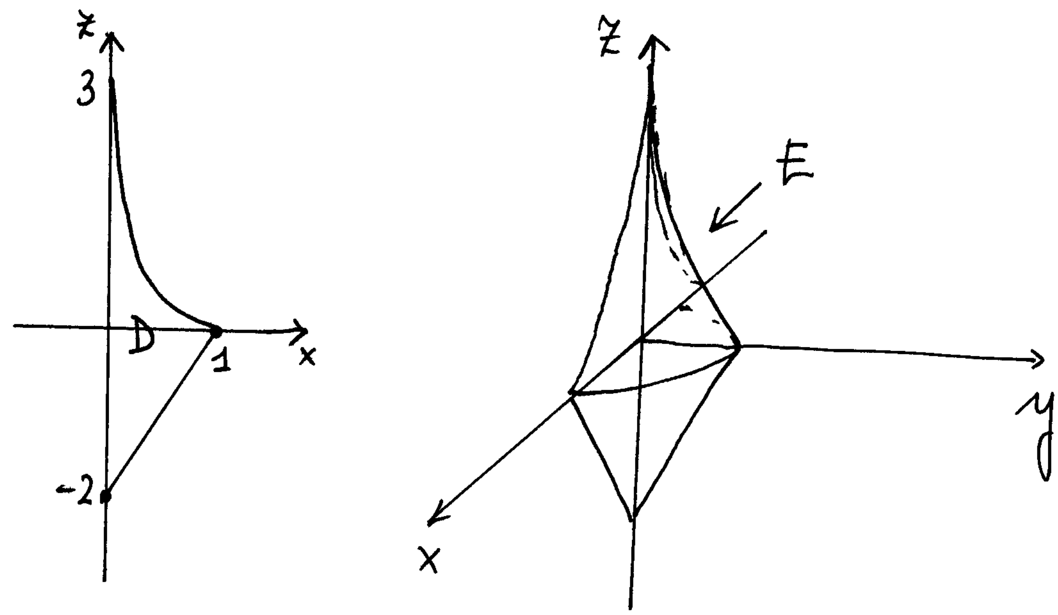
$$(\pm 8, 0, 0), \ (-4\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2), \ (4\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2)$$

(*) In realtà la costante c può assumere valori diversi nei due semipiani.

Calcolando i valori di f in questi punti, si ottiene che i punti $(-4\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2)$ sono di min. assoluto, mentre $(4\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2)$ sono di max. assoluto.
I valori corrispondenti di f sono $-12\sqrt{2}$, $+12\sqrt{2}$, rispettivamente.

---

3)



a) per il teorema di Guldino,

$$\text{vol. } E = \pi \iint_D x \, dx\, dz = \pi \int_0^1 dx \, x \int_{2(x-1)}^{3(1-x)^3} dz = \frac{29\pi}{60}$$

b) Per il teorema della divergenza,

$$\int_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy\,dz = \iiint_E (4x^2 - y^2)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} d\rho \int_{2(\rho-1)}^{3(1-\rho)^3} dz \quad \rho^3 \left(4\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = \frac{51}{280}\pi .$$

---

4) Derivando la prima equazione e sostituendo le espressioni di v e di v' che si ottengono dalle due equazioni, si ottiene:

$$u'' = u' + \frac{v'}{2} - 4 = u' - 5u + \frac{5}{2}v - e^{2x} - 4 =$$

$$= u' - 5u + 5u' - 5u + 20x - e^{2x} - 4,$$

cioè:

$$u'' - 6u' + 10u = 20x - 4 - e^{2x},$$

che ammette come integrale generale

$$u(x) = e^{3x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) + 2x + \frac{4}{5} - \frac{e^{2x}}{2};$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$v(x) = 2u'(x) - 2u(x) + 8x =$$

$$= e^{3x}\left[(4c_1 + 2c_2)\cos x + (4c_2 - 2c_1)\operatorname{sen} x\right] + 4x + \frac{12}{5} - e^{2x} .$$

CALCOLO DIFFERENZIALE - Ingegneria Aerospaziale PROVA PRATICA $\diamondsuit$ (19/7/2007)

Cognome e nome ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova orale:

◯ 24–25 luglio; ◯ 26–27 luglio; ◯ 30–31 luglio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi** attenendosi alle domande in essi formulate, e motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di calcolatrici grafiche o simboliche, personal computer, appunti. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\,, \ \frac{2\,(1+xy^2+x^2y^4)}{y\,(1+x^2y^4)} \Big)$$

quando agisce su un punto che si muove lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 - t^2 - t\,, \\ y(t) = 1 + \operatorname{sen}(\pi t^3)\,, \end{cases} \qquad t \in [0,1]\,.$$

Suggerimento: il calcolo diretto è sconsigliato. *(9 punti)*

---

2. Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = z + 2xy$$

nell'ellissoide

$$4x^2 + y^2 + 2z^2 \le 1\,.$$

(8 punti)

---

3. Dato l'insieme D del piano xz definito da

$$D = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1\,,\ -(1-x)^2 \le z \le 3(1-x)\}\,,$$

sia E il solido contenuto nel semispazio $y \ge 0$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse z. Calcolare:

a) il volume di E;

b) il flusso uscente da ∂E del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2yz - x^3\,,\ x^2y - z\,,\ 4y^2z\big)\,.$$

(10 punti)

---

4. Trovare tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u'(x) = 4\,u(x) + 20\,v(x) - e^{3x}\,, \\[2mm] v'(x) = \dfrac{u(x)}{2} + v(x) + 2x\,. \end{cases}$$

(9 punti)

Le risoluzioni sono simili a quelle dell'altra fila.
Segnalo solo le differenze:

1) Dominio: $\{y<0\} \cup \{y>0\}$

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}(xy^2) + 2\ln|y| + c$$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = U(1,1) - U(0,1) = \frac{\pi}{4}$$

2) Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2y = 8\lambda x \\ 2x = 2\lambda y \\ 1 = 4\lambda z \\ 4x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 . \end{cases}$$

6 soluzioni:

$\left(0, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (massimi),

$\left(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (minimi).

3)

a) $\text{vol}.E = \pi \int_0^1 x\,dx \int_{-(1-x)^2}^{3(1-x)} dz = \frac{7}{12}\pi$

b) $\int_{\partial E} \underline{F}\cdot\underline{\nu}\,d\sigma = \iiint_E (-2x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{6}$

4) Derivando la prima equazione e sostituendo v, v', si ottiene:

$$u'' = 5u' + 6u - 2e^{3x} + 40x,$$

da cui

$$u(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-x} - \frac{20}{3}x + \frac{50}{9} + \frac{e^{3x}}{6}$$

$$v(x) = \frac{c_1}{10} e^{6x} - \frac{c_2}{4} e^{-x} + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9} + \frac{e^{3x}}{24}.$$