Formula di Taylor

Calcolare i seguenti limiti:

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}\sqrt{1+2x}-1}{4x}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\tan x}$

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x\sin x^3}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\tan x - x}$

7 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+x^2\log x}{\cos\sqrt{x}-1}$

8 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}}{\log(1+e^{x^{-3}})-\log 2}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x-2+2\cos x}{x\ln(1+x)-x^2}$

10 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\big(\ln(1+x)-x\big)}{x(e^x-1)-2+2\cos x}$

11 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\cos x}-\log^2(1+\sqrt{x})-1}{\sqrt{\operatorname{sen} x - x\cos x}}$

12 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left[\left(1+\frac{\ln 10}{x}\right)^x-10\right]$,

13 (∗) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\pi-2\arcsin(\log(e-x^4))}{\pi-\arccos(x\sin x-\log(1+x^2)-1)}$,

14 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[(1+\sin^2 x)^{\operatorname{cotg} x}\right]-x}{x^3}$.

15 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^5e^{x^3}-\log(1+x^5)}{(\sqrt{1+x^4}-1)^2}$

16 (∗)

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\left[\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x+1}-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x-1}\right]$$

17 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)\,,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$, dove

$$f(x)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\operatorname{tg}^2 x}{x-\operatorname{tg} x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}^2 x}$$

18 $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} t^\alpha\left(\log\left(1+\frac{3}{t^2}\right)-3\operatorname{sen}\frac{1}{t^2}\right),\quad \alpha\in\mathbb{R}$.

19 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh}(x-x^2)}{1-e^{-x^2}-x^2}$

---

20 Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo di $f(x)=(x^2+3x+\operatorname{arctg} x)^5\left(\exp(-\frac{1}{2x^2})-\cos(\frac{1}{x})\right)$, per $x\to+\infty$ (qui $\exp(t)=e^t$).

21 Trovare la derivata sesta, nel punto $x=0$, della funzione $f(x)=(1+\sin^2 x)^{\cos x^2}$. Fare la stessa cosa per la derivata 351-esima.

22 Si determini l'ordine di infinitesimo, per $x\to 0$, delle seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{1-\operatorname{ch} x^2+x^4}{x^3+x}\ ,$$

$$g(x)=\frac{1-\operatorname{ch} x^2+\alpha x^4}{x^\alpha+x}\ ,\quad \text{al variare di } \alpha>0.$$

23 Calcolare l'ordine di infinitesimo o di infinito per $x\to 0^+$ della seguente funzione, al variare di $\alpha>0$: $\displaystyle\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{-1+\sqrt{1+x}}\right)^\alpha-1$

24 Calcolare gli sviluppi di MacLaurin fino all'8^0 grado delle funzioni

$$f(x)=\ln(3-2e^{x^3})\,,\qquad g(x)=\frac{\ln(3-2e^{x^3})}{1-2\operatorname{sen} x^2}\,.$$

25 Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x\to 0^+$:

$$f(x)=x^2\ln x\ ,\quad g(x)=\frac{x-\operatorname{sen} x+x^6}{\sqrt{x}}\ ,$$

$$h(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}\ ,\quad k(x)=x+x^2\ln x\,.$$

26 Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x\to 0^+$:

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt[3]{x}}\ ,\quad g(x)=x^3-x^4\ln x\ ,$$

$$h(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^{3/2}}\ ,\quad k(x)=\sqrt{4+2x^2}-2\,.$$

27 Al variare del parametro reale α, trovare l'ordine di infinitesimo, per $x\to 0^+$, della funzione

$$f_\alpha(x)=\ln(1-\alpha\, x\operatorname{sen} x)-e^{-x^2}+1\,;$$

1 Risposte ad alcuni esercizi

1: $\frac{e}{2}$; **2:** 1; **3:** $\frac{1}{3}$; **4:** $\frac{7}{12}$; **5:** $-\frac{3}{2}$;
6: $\frac{1}{2}$; **7:** 1; **8:** $-\frac{2}{3}$; **9:** 0; **10:** 0;
11: $\sqrt{3}$; **12:** $-5\ln^2 10$; **14:** $-\frac{7}{6}$; **15:** 4;
16: $\frac{2}{3}$; **17:** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2}{\pi}$;
22: *a)* Si ha

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$

quindi

$$\operatorname{ch} x^2 = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto

$$1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4 = \frac{x^4}{2} + o(x^6) \sim \frac{x^4}{2}\,.$$

Poiché $x^3 + x \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^4}{2x} = \frac{x^3}{2}\,.$$

Quindi f è un infinitesimo di ordine 3. Questa parte poteva essere svolta usando i limiti notevoli al posto della formula di Taylor.

b) Ragionando allo stesso modo si ottiene

$$1 - \operatorname{ch} x^2 + x^4 \sim \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) x^4\,,$$

purché $\alpha \neq 1/2$. Inoltre si ha

$$x^\alpha + x \sim \begin{cases} x & \text{se } \alpha > 1 \\ 2x & \text{se } \alpha = 1 \\ x^\alpha & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto:

- se $\alpha \geq 1$, $g(x)$ è un infinitesimo di ordine 3;
- se $0 < \alpha < 1$, con $\alpha \neq 1/2$, $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $4 - \alpha$;
- se $\alpha = 1/2$, i termini di ordine 4 nel numeratore si annullano, e bisogna scrivere il successivo termine dello sviluppo di Taylor:

$$\operatorname{ch} x^2 = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^{10}) \qquad \text{per } x \to 0,$$

da cui

$$g(x) \sim -\frac{x^8}{24x^\alpha} = -\frac{x^{15/2}}{24}\,,$$

e $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{15}{2}$.

24:

Prima funzione: Si ha

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0.$$

Quindi

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0,$$
$$3 - 2e^{x^3} = 1 - 2x^3 - x^6 + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0.$$

D'altra parte

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0;$$

utilizzando quest'ultima formula con $t = -2x^3 - x^6 + o(x^8) \to 0$, e ricordando le proprietà degli "o piccoli", otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\big(1 + (-2x^3 - x^6 + o(x^8))\big) = \\ &= \big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big) \underbrace{-\frac{1}{2}\big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big)^2}_{=-2x^6+o(x^8)} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{3}\big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big)^3}_{=o(x^8)} + \underbrace{o\Big(\big(-2x^3 - x^6 + o(x^8)\big)^3\Big)}_{=o(x^8)} = \\ &= -2x^3 - 3x^6 + o(x^8)\,. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $P_8(x; f)$ di Mac Laurin di grado 8 è l'unico tra i polinomi $p(x)$ di grado ≤ 8 tale che

$$f(x) = p(x) + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0,$$

se ne deduce che

$$P_8(x; f) = -2x^3 - 3x^6\,.$$

Seconda funzione: Dobbiamo cercare lo sviluppo di MacLaurin di

$$h(x) = \frac{1}{1 - 2\operatorname{sen} x^2}$$

e moltiplicarlo per quello ottenuto per f. Poiché lo sviluppo di f inizia con un termine di grado 3, basterà sviluppare $h(x)$ fino all'ordine 5. Si ha:

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \qquad \text{per } t \to 0.$$

Quindi

$$2\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^8) = x^2 + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$

e prendendo in quest'ultima formula $t = 2x^2 + o(x^5) \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{1 - \big(2x^2 + o(x^5)\big)} = \\
&= 1 + \big(2x^2 + o(x^5)\big) + \underbrace{\big(2x^2 + o(x^5)\big)^2}_{=4x^4+o(x^5)} + \\
&\qquad + \underbrace{\big(2x^2 + o(x^5)\big)^3}_{=o(x^5)} + \underbrace{o\Big(\big(2x^2 + o(x^5)\big)^3\Big)}_{=o(x^5)} = \\
&= 1 + 2x^2 + 4x^4 + o(x^5)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(x)h(x) = \\
&= \Big(-2x^3 - 3x^6 + o(x^8)\Big) \cdot \Big(1 + 2x^2 + 4x^4 + o(x^5)\Big) = \\
&= -2x^3 - 4x^5 - 3x^6 - 8x^7 - 6x^8 + o(x^8)\,.
\end{aligned}$$

Dunque il polinomio cercato è

$$P_8(x; g) = -2x^3 - 4x^5 - 3x^6 - 8x^7 - 6x^8\,.$$

25:

Analisi di $f(x)$: Tenuto conto che, per $x \to 0^+$, $\ln x$ tende a $-\infty$, ma più lentamente di qualunque potenza negativa di x, si ottiene che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a 2, ma di ordine superiore rispetto ad ogni numero minore di 2.

Analisi di $g(x)$: Osservato che

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

e quindi che

$$x - \operatorname{sen} x + x^6 = \frac{x^3}{6} + o(x^4)\,,$$

si ottiene che

$$g(x) = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\sqrt{x}} \sim \frac{x^{5/2}}{6}\,,$$

quindi $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\dfrac{5}{2}$.

Analisi di $h(x)$: Usando lo sviluppo

$$(1 + t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t) \qquad \text{per } t \to 0\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
h(x) &= (1 + x^2)^{1/2} - (1 + x^2)^{1/3} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \big(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\big) = \frac{x^2}{6} + o(x^2)\,,
\end{aligned}$$

e quindi $h(x)$ è un infinitesimo di ordine 2.

Analisi di $k(x)$:

$$k(x) = x\,\big(1 + x\,\ln x\big)\,.$$

Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} x\,\ln x = 0\,,$$

ne segue che $k(x) \sim x$, quindi è un infinitesimo di ordine 1.

Quindi le quattro funzioni sono così ordinate in ordine crescente:

$$k(x)\,, \quad f(x)\,, \quad h(x)\,, \quad g(x)\,.$$