

1 Numeri complessi

Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

1.1 5

1.2 $1 + i$

1.3 $-i\sqrt{2}$

1.4 $6 - i2\sqrt{3}$

1.5 $7 - i2\sqrt{3}$

Calcolare

1.6 $\sqrt[3]{-i}$

1.7 $\sqrt{2 - 2i}$

1.8 $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$

1.9 $(1 + i)^6$

1.10 $(3 - 3i)^7$

1.11 Sia $z = \frac{i + \sqrt{3}}{2}$. Calcolare, in forma trigonometrica, $\frac{1}{z}$ e $\sqrt[4]{z}$.

Risolvere le seguenti equazioni (o sistemi) nel campo complesso:

1.12 $z^2 - i\bar{z} = 0$

1.13 $(z + 2i)^2 = 4|z|^2 - 8(\operatorname{Im}z)^2$

1.14 $z^2 + 2z + i = 0$

1.15 $z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$

1.16 $z^4 = |z|^2 + 2$

1.17 $|z|^2 z^2 = i$

1.18 $z + i\bar{z}^2 = -2i$

1.19 $z^2 + z\bar{z} = 1 + 2i$

1.20 $z|z| - 2z - 1 = 0$

1.21 $z + \bar{z} - 3\operatorname{Im}(z) = z^2 + |z|$

1.22 $z|z|^2 + |z|\bar{z}^2 - \bar{z}z^2 = i$

1.23 $(\bar{z})^2 - |z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) = i - 2$

1.24 $(z - i)^3 = 8i$

$$1.25 \begin{cases} |z^2 + 1| = 1 \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}|z|^2 \end{cases}$$

1.26 Trovare le radici none di 1 che hanno parte reale positiva.

1.27 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $z + |z| = 3i + a$ ha soluzioni $z \in \mathbb{C}$? Trovare tali soluzioni, se esistono.

1.28 Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} z^3 - \bar{z}^3 = 0 \\ |\arg(z - 1)| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

è costituito dall'unione di tre semirette, e determinarle.

1.29 Scrivere i numeri complessi

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11}, \quad w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6$$

sia in forma trigonometrica che nella forma $a + ib$. Successivamente scrivere le radici seste di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso.

1.30 Scrivere i numeri complessi

$$z = (1 - i\sqrt{3})^4, \quad w = \frac{(1 - i\sqrt{3})^4}{(-1 - i)^6}$$

sia in forma trigonometrica che nella forma $a + ib$. Successivamente scrivere le radici terze di w (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso.

1.31 Dato il numero complesso $z = 2 - 2i$, determinare:

- a) z^3 ; b) z^{13} ; c) $\frac{1}{z^3}$;
 d) le radici cubiche di z^3 (in forma trigonometrica);
 e) $z^3 \bar{z}^3$ (commentare: perché viene fuori un numero reale positivo?).

2 Risposte ad alcuni esercizi

1.1: $5e^{i0}$

1.2: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

1.3: $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

1.4: $4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1.5: $\sqrt{61}e^{-i \arctg \frac{2\sqrt{3}}{7}}$

1.12: $z = 0$; $z = -i$; $z = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$

1.25: $z = 0$; $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$