

Estremo superiore e inferiore

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore delle seguenti successioni e dire se sono rispettivamente massimo e minimo ($n = 1, 2, \dots$, se non precisato diversamente)

$$1 \quad a_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$2 \quad a_n = \operatorname{arctg} \frac{n + (-1)^n n - 3}{n^2 + 3}$$

$$3 \quad a_n = \left[(-1)^n \frac{n+1}{n} \right] \operatorname{arcsen} \frac{1}{n} \exp \left(-\cos \frac{\pi}{n+1} \right),$$

dove $\exp(t) = e^t$, $[t]$ denota la parte intera di t , cioè il più grande $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k \leq t$;

$$4 \quad a_n = (\cos(n\pi) + 1) \operatorname{arcsen} \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{\ln(1 + e^{-n}) + n}{n}$$

5 Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$a_n = \operatorname{arctg}(1 - n^2), \quad b_n = \operatorname{arctg} [(-1)^n (1 - n^2)],$$

$$c_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n - 3\pi}.$$

6 Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$a_n = \frac{\pi n}{2n + 5}, \quad b_n = \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2n + 5},$$

$$c_n = (-1)^n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2n + 5}.$$

7 Calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle seguenti successioni ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$a_n = \frac{1}{3n^2 + 5}, \quad b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n},$$

$$c_n = 2^{(-1)^n a_n}.$$

8 Trovare estremo superiore ed estremo inferiore delle seguenti successioni, e dire se si tratta, rispettivamente, di massimo e minimo:

$$a_n = \operatorname{arctg} \frac{3n}{n+2}, \quad b_n = 5(-1)^n + a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Risposte ad alcuni esercizi

$$1: \quad \max E = \operatorname{arctg} 2, \quad \inf E = \frac{\pi}{4};$$

$$2: \quad \max a_n = a_4 = \operatorname{arctg} \frac{5}{19}; \quad \min a_n = a_1 = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4};$$

$$5: \quad \max a_n = a_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \inf a_n = -\frac{\pi}{2};$$

$$\sup b_n = \frac{\pi}{2}; \quad \inf b_n = -\frac{\pi}{2};$$

$$\max c_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{10 - 3\pi} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(10 - 3\pi);$$

$$\min c_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{9 - 3\pi} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(3\pi - 9);$$

$$6: \quad \sup a_n = \frac{\pi}{2}; \quad \min a_n = a_1 = \frac{\pi}{7};$$

$$\sup b_n = 1; \quad \min b_n = b_1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{7};$$

$$\sup c_n = 1; \quad \inf c_n = -1;$$

9 Siano A e B due insiemi di numeri reali. Provare che

$$\sup(A \cup B) = \max \{ \sup A, \sup B \},$$

$$\inf(A \cup B) = \min \{ \inf A, \inf B \}$$