1 Integrali impropri

Stabilire il carattere dei seguenti integrali impropri:

1.1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^8}}$

1.2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt[4]{1-x^5}}$

1.3 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2-\sqrt{x}-2\cos x}{x}\,dx$

1.4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-3}{x^2-\log x}\,dx$

1.5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(e^{1/\sqrt[3]{x}}-1\right)dx$

1.6 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\log\frac{x+1}{x-1}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}\,dx$

1.8 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-2}\right)^{\alpha} dx\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

1.9 $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(e^x+2)-x)\,dx$

1.10 $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,\cos x}{\sqrt{27x^3-1}}\,dx$

1.11 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^6\frac{1}{x}}{\log(x^4+3)-4\log x}\,dx$

Calcolare i seguenti integrali impropri:

1.12 $\displaystyle\int_0^{1} \ln\frac{20x}{2x^2+3}\,dx$

1.13 Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il semipiano $x\geq 1$, il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ e il suo asintoto obliquo.

1.14 Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x-2)^6}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\right)^{\alpha} dx\ ,$$

e successivamente calcolarlo per $\alpha=0$.

1.15 Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge ciascuno degli integrali impropri

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-2)^{\alpha}}\,dx\,,\qquad \int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\alpha}}\,dx\,,\qquad \int_1^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{|x-2|^{\alpha}}\,dx\,,$$

e calcolare il primo per $\alpha=2$.

1.16 Dire per quali $\alpha>0$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{(x^{\alpha}+\alpha)^2}\,dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha=1$.

1.17 Dire per quali $\alpha\geq 9$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+\alpha)\,(x+1)}\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha=13$.

1.18 Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(2x+3)\big)^{\alpha}}{(x+3)^3}\,dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha=1$.

1.19 Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{1} \frac{\log(1+x)}{x^{\alpha}}\,dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha=\dfrac{3}{2}$.

1.20 Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{2} |\operatorname{cotg} x|^{\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+3x^2}-\frac{1}{x}\right)dx\ ,$$

e calcolarlo per $\alpha=0$.

2 Risposte ad alcuni esercizi

1.1: converge; **1.2:** converge; **1.3:** converge; **1.4:** non converge; **1.5:** non converge; **1.6:** converge; **1.7:** converge; **1.8:** converge se e solo se $\alpha > 1$; **1.9:** converge; **1.10:** converge; **1.11:** converge; **1.12:** $\ln 4 + 1 - \sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

1.16: converge per $\alpha > \frac{1}{2}$; $\frac{1}{20}\,(3\pi = 14\,\mathrm{arctg}\,2 = \ln 5)$;

1.17: converge per $\alpha > 9$; $\frac{\pi}{20} + \frac{1}{40}\ln 13 + \frac{1}{10}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$;

1.18: converge per ogni α; $\frac{1}{18\,(\ln 48 - 2)}$;