Come sempre, si ricorda di fare **prima** esercizi dai testi consigliati.

1 Curve e integrali curvilinei di prima specie

1.1 Disegnare la spirale archimedea di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = \theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

e verificare che è una curva regolare. Calcolarne la lunghezza.

1.2 Verificare che la cardioide di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 1 + \cos\theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

ha una "cuspide" per $\theta = \pi$, cioè un punto in cui il versore tangente "salta" da un valore al valore opposto.

1.3 Disegnare l'elica conica di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

e verificare che è una curva regolare. Calcolarne la lunghezza.

1.4 Calcolare $\int_\gamma xy\,ds$, dove γ è la parte dell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ che si trova nel primo quadrante.

1.5 Mostrare che la curva grafico

$$y = 2\sqrt{1 - x^2}\,, \qquad x \in [-1, 1]$$

e la curva

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = -2\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

sono equivalenti ed hanno lo stesso verso. Disegnarne il sostegno. Trovare una curva equivalente ma con il verso opposto.

1.6 Verificare che la curva

$$\gamma \begin{cases} x = \operatorname{sen}^3 t \\ y = 2t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

è una curva regolare. Calcolare il versore tangente e la retta tangente a γ per $t = \pi/3$.

1.7 Calcolare il baricentro del quarto di asteroide, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]\,.$$

1.8 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_C \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}\, ds\,,$$

dove C è l'ellisse di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.9 Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$, calcolare

$$\int_{+\gamma} f(x, y)\, ds\,,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche $x = e^t$, $y = \operatorname{sen}(t)$, t in $[0, \pi]$.

1.10 Detto γ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, con $x \in [0, 1]$, calcolare

$$\int_\gamma x\, ds\,.$$

1.11 Disegnare la strofoide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^3 - t\,, \\ y = t^2 - 1\,. \end{cases}$$

E' regolare? E' semplice?

1.12 Disegnare la curva γ del piano xy che si scrive, in coordinate polari, $\rho = |\operatorname{sen} 3\theta|$, $\theta \in [0, \pi]$. E' una curva regolare?

1.13 Disegnare la curva γ di equazione polare

$$\rho = 2\cos^2\theta\,, \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right]\,,$$

e dire se è regolare.

1.14 Sia $E = C_1 \cup C_2$, dove C_1 è il cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$, e C_2 è il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Calcolare il baricentro della frontiera di E. **N.B.:** Una soluzione di questo esercizio si trova qui: `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-2002_07_26_soluz.pdf`
Ma prima è meglio provarci da soli!

2 Risposte ad alcuni esercizi

1.1: $\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$;
1.2: osservato che $\gamma'(\pi)=0$, si può controllare che $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi^\pm}\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=0$, che implica che $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi^\pm}\mathbf{T}'(\theta)$ vale $(1,0)$ oppure $(-1,0)$; osservando che $x'(\theta)$ è positivo (negativo) in un intorno sinistro (destro) di π, se ne deduce che $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi^-}\mathbf{T}'(\theta)=(1,0)$, $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi^+}\mathbf{T}'(\theta)=(-1,0)$;
1.4: $\dfrac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$; **1.8:** $\pi\,(a^2+b^2)$; **1.9:** $\frac{1}{2}\,(e^{2\pi}+\pi-1)$;