

1 Foglio n. 2 di esercizi: integrali multipli

1.1 Calcolare il volume del solido E costituito dai punti interni alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ed esterni al cilindro $x^2 + z^2 = 9$ (esercizio svolto a lezione).

1.2 Calcolare il volume del “cono gelato” (unione di un cono e di una semisfera piena) di apertura θ , raggio massimo r e vertice nell'origine. Calcolarne il baricentro quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 2$ e $z \geq 0$ (esercizio svolto a lezione).

1.3 Calcolare

$$\iiint_A \frac{x^2 e^z}{1+z^2} dx dy dz,$$

dove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 + 1, |z| \leq 1\}.$$

(esercizio svolto durante l'esercitazione).

1.4 Calcolare

$$\iiint_A \log(z + y + 3) dx dy dz,$$

dove A è il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$.

1.5 Posto

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 &< 0, \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 &> 0 \end{aligned} \right\}$$

sia T il solido ottenuto facendo ruotare E di un angolo giro intorno all'asse x . Calcolare il volume di T .

1.6 Sia T il solido ottenuto ruotando intorno all'asse z il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ nel piano (y, z) ; calcolare l'integrale

$$\iiint_T \frac{dx dy dz}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

1.7 Calcolare

$$\iiint_R xyz^2 dx dy dz$$

dove

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq z \leq x, x+z \leq y \leq 4\}.$$

1.8 Sia $B(r)$ la palla di \mathbb{R}^3 di centro l'origine e raggio r . Calcolare

$$\iiint_{B(R) \setminus B(r)} (y-3)^2 dx dy dz, \quad R > r > 0.$$

1.9 Calcolare il volume del solido determinato da

$$\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{z > 0\} \cap \{x^2 + y^2 + (z+1)^2 \geq 2\}.$$

1.10 Calcolare il volume dei solidi ottenuti ruotando intorno all'asse z le curve di equazione

- $(x-2)^2 + z^2 \leq 1, x \leq 2$
- $(x-2)^2 + z^2 \leq 1, x \geq 2$

1.11 Utilizzando coordinate cilindriche calcolare il volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 - x + y^2 \leq 0\}$$

(esercizio svolto a lezione).

1.12 * Risolvere l'esercizio precedente utilizzando coordinate sferiche.

1.13 Calcolare

$$\iiint_A \frac{x^2}{z} dx dy dz$$

dove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

1.14 * Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Calcolare

$$\iiint_{A \cap B} xyz dx dy dz.$$

1.15 Determinare il baricentro della piramide di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(a, b, 4)$ quando

- $a = b = 0$
- a, b sono le coordinate del centro della base.

1.16 Esempio 14.21 (pag. 387) del libro di testo.

1.17 Esempio 14.22 (pag. 388) del libro di testo.

1.18 Esempio 14.23 (pag. 388) del libro di testo.

1.19 Esercizio 14.10 (pag. 388) del libro di testo.

1.20 Esempio 14.25 (pag. 390) del libro di testo.

1.21 Esempio 14.26 (pag. 390) del libro di testo.

1.22 Esempio 14.28 (pag. 392) del libro di testo.

1.23 Esempio 14.29 (pag. 392) del libro di testo.

1.24 Esempio 14.30 (pag. 393) del libro di testo.

1.25 Esercizio 14.11 (pag. 388) del libro di testo.

1.26 Trovare gli $\alpha > 0$ tali che l'integrale

$$\iint_{B_1} \frac{dx dy}{|(x, y)|^\alpha}$$

converga, dove B_1 è il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine. (*esercizio svolto a lezione*).

1.27 Trovare gli $\alpha > 0$ tali che l'integrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1} \frac{dx dy}{|(x, y)|^\alpha}$$

converga, dove B_1 è il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine. (*esercizio svolto a lezione*).

1.28 Trovare gli $\alpha > 0$ tali che l'integrale

$$\iiint_{B_1} \frac{dx dy dz}{|(x, y, z)|^\alpha}$$

converga, dove B_1 è la palla di raggio 1 centrata nell'origine.

1.29 Trovare gli $\alpha > 0$ tali che l'integrale

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{dx dy dz}{|(x, y, z)|^\alpha}$$

converga, dove B_1 è la palla di raggio 1 centrata nell'origine.

1.30 Calcolare

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

converga, dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x\}.$$

1.1 Risposte ad alcuni esercizi

1.26: $\alpha < 2$; **1.27:** $\alpha > 2$; **1.28:** $\alpha < 3$;

1.29: $\alpha > 3$; **1.30:** $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.