Foglio n. 5 di esercizi: Teoremi della divergenza e del rotore

1 Teoremi della divergenza e del rotore

1.1 Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x, f(y), zy^2)$ determinare $f \in C^1(\mathbb{R})$ in modo che il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da T

$$\int_{\partial T} (\mathbf{F} \cdot \nu_e)\, d\sigma$$

sia nullo per ogni per ogni dominio regolare $T \subset \mathbb{R}^3$ (ν_e denota il versore normale a ∂T, orientato verso l'esterno di T).

1.2 Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e \, d\sigma \,,$$

dove $\mathbf{V}$ è il campo vettoriale di componenti $(x^2+y^2, 0, z)$, S è la superficie cilindrica definita da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 5x \,, \quad 0 \le z \le 1\}\,,$$

e $\mathbf{n}_e$ indica il versore normale esterno a S.

1.3 Disegnare la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Utilizzando le formule di Gauss-Green, calcolare $\iint_D x^2\, dx\, dy$, dove D è il dominio racchiuso dalla curva.

1.4 Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (3xy\,, -\lambda y^2\,, 4x^2 + 3z)$, determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo tale che l'integrale

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu_e \, d\sigma$$

sia pari al triplo del volume di V per ogni dominio regolare V (ν_e denota il versore normale esterno a ∂V).

1.5 Utilizzando il teorema di Stokes, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (x^2 - xy)\, dx + (xy - y^2)\, dy \,,$$

dove γ è la frontiera del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, percorsa in verso orario.

1.6 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (a^2 x + x^2 e^y + y, 2(1-a)y - 2xe^y)\,,$$

determinare il parametro a in modo da minimizzare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da **ogni** dominio regolare del piano.

1.7 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x + \log(1+y^2), y - y^2 z, yz^2)$$

uscente dalla frontiera del cono circolare retto di base

$$x^2 + y^2 \le 4\,, \quad z = 0$$

e di vertice $(0,0,3)$.

1.8 Dato il dominio piano D intersezione del cerchio unitario con il primo quadrante, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+\partial D} y\sqrt{1+x^2+y^2}\, dy \,:$$

a) direttamente;
b) tramite un opportuno integrale doppio.

1.9 Disegnare la curva γ di equazione polare

$$\rho = 2\cos^2\theta \,, \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right]\,;$$

sia D il dominio delimitato da γ e dagli assi coordinati. Calcolare

$$\iint_D x\, dx\, dy$$

mediante un integrale curvilineo sulla frontiera di D.

1.10 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 e^z \,,\ y^3 \,,\ 3x^2 z)\,,$$

calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente dalla superficie S, frontiera del dominio delimitato dal paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, dal piano xy e dal piano xz, e contenuto nel semispazio $y \ge 0$.