

Foglio n. 7 di esercizi: Estremi vincolati, serie di Fourier, equazioni differenziali

1 Estremi vincolati

1.1 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sul vincolo $2x^2 + y^2 + 2x^2y^2 = 0$. (Prima di calcolarli, assicurarsi che esistano: il dominio è chiuso e limitato?)

1.2 Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$ nell'insieme

$$E = \{(x, y, z) : 2x + 4y - 3z + 5 = 0\}.$$

1.3 Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$ in

$$E = \{(x, y, z) : 2x + 2y + z = 0, 4x^2 + y^2 = 8z\}.$$

2 Serie di Fourier

2.1 Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

(prolungata all'asse reale in modo che sia periodica di periodo 2π) e studiarne la convergenza puntuale.

2.2 Calcolare la serie di Fourier della funzione definita da

$$f(x) = 3 - x^2$$

per $x \in (-\pi, \pi]$, prolungata all'asse reale con periodicità 2π . Studiare la convergenza puntuale.

2.3 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Prolungare f per periodicità su tutto l'asse reale, e scrivere la sua serie di Fourier. Discuterne la convergenza.

3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

3.1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' = (1 - 2x)y' \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(Suggerimento: porre $y'(x) = z(x)$)

3.2 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) - 3y(x) \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$$

3.3 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' = 3x + 2xe^x.$$

(Suggerimento: porre $y''(x) = z(x)$)

3.4 Trovare l'integrale generale di

$$y' + y \operatorname{ch} x = 3 \operatorname{ch} x.$$

3.5 Trovare l'integrale generale di

$$x y' = 2y + 3(\ln x)^2 - 2(\ln x)^3.$$