Foglio n. 8 di esercizi: Equazioni differenziali

0.1 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}y + (1+x^2)^{1-\alpha}\, y^{1-\alpha}\,, \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

determinare i valori di $\alpha > 0$ per i quali la soluzione ammette limite finito per $x \to +\infty$.

0.2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''' - y'' + 3y' + 5y = xe^{-x} + 5$$

tali che

$$y(0) = 2\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare inoltre λ.

0.3 Determinare i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + 3y = \lambda y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non nulle limitate, e individuarle. *(Soluzione in fondo a questo documento)*

0.4 Al variare del parametro reale β, determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = e^{-2x},$$

e individuare tutte le soluzioni tali che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

0.5 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 13y = 3\,.$$

(Soluzione in fondo a questo documento)

0.6 Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che abbia tra le sue soluzioni le funzioni

$$5\,\mathrm{sen}\,x\,, \qquad 3\,\mathrm{sen}\,2x\,, \qquad 5x - 2\,.$$

0.7 Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta come soluzioni le seguenti funzioni

$$e^x\cos(3x) \qquad x^2e^{2x} \qquad \mathrm{sen}\,x$$

0.8 Determinare, al variare del parametro λ, l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''' - (\lambda+3)y'' + 3\lambda y' = 5.$$

0.9 Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema

$$\begin{cases} y'' = 2\lambda y \\ y(0) = y(3) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non nulle. *(Soluzione in fondo a questo documento)*

Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

0.10

$$y'' - 2y' + y = e^x\left(3 + \frac{\log^2 x}{x}\right)$$

0.11

$$y'' - 4\frac{y'}{x+1} - 2(x+1)\sqrt{y'} = 0$$

0.12

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 7\cos x\,.$$

0.13

$$y''' - 2y'' = 3x + 2xe^x\,.$$

0.14

$$y' = 2xy - 4xy^2\,.$$

0.15

$$x(y')^3y'' = (y')^4 - 2\,.$$

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

0.16

$$\begin{cases} y'' + 5y = \cos(x\sqrt{5}) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

0.17

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{2y'}{x} = 1 + x^3\,, \\ y(1) = 4\,, \\ y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

0.18

$$\begin{cases} y''' + 8y'' + 25y' = 5\cos x + 13\,\mathrm{sen}\,x \\ y'(0) = 5 \\ \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

0.19
$$\begin{cases} y''' + y'' = -\cos x\,, \\ y(0) = -1\,, \\ y'(0) = 0\,, \\ y''(0) = 0\,. \end{cases}$$

0.20
$$\begin{cases} y'' + \dfrac{2y'}{t} = t - 1 + \dfrac{1}{t}\,, \\ y'(1) = \frac{1}{2}\,, \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

0.21
$$\begin{cases} 2\sqrt{x}\, y'' = (y')^2 - 2y' + 1\,, \\ y'(1) = \lambda\,, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

per $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$.

0.22
$$\begin{cases} x^2 y'' = (1-2x)y' \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Al variare del parametro α, trovare l'integrale generale delle equazioni differenziali

0.23
$$y''' - y'' + 9y' - 9y = \operatorname{sen}(\alpha x)\,.$$

0.24
$$y'' + (\alpha - 3)y' - 3\alpha y = 2x\ .$$

0.25
$$y''' - (\alpha + 3)y'' + 3\alpha y' = 5.$$

Risolvere i seguenti sistemi differenziali nelle incognite $u(x)$, $v(x)$:

0.26
$$\begin{cases} u' = u + 2v \\ v' = u - \cos x \end{cases}$$

0.27
$$\begin{cases} u' + v + x = 0 \\ v' - v + 2u = 1 \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 0.3: Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine, con una sola condizione iniziale assegnata invece delle usuali due. E' chiaro quindi che il problema ammetterà infinite soluzioni. Resta da vedere se tra queste ce n'è qualcuna limitata, oltre a quella identicamente nulla. Ci sono tre possibilità:

a) se $\lambda > 3$, le soluzioni del problema (P) sono
$$y(x) = c\left(e^{-\sqrt{\lambda-3}\,x} - e^{\sqrt{\lambda-3}\,x}\right), \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$
e non comprendono soluzioni limitate in $\mathbb{R}$ eccetto quella identicamente nulla.

b) se $\lambda = 3$, le soluzioni di (P) sono $y(x) = cx$, con $c \in \mathbb{R}$. Di nuovo l'unica soluzione limitata è quella identicamente nulla.

c) se $\lambda < 3$, le soluzioni di (P) sono
$$y = c \operatorname{sen}\left(\sqrt{3-\lambda}\, x\right), \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$
e sono tutte limitate.

Soluzione dell'esercizio 0.5:
$$y(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x\right) + \frac{3}{13}\,,$$
con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie.

Soluzione dell'esercizio 0.9:

Per $\lambda = 0$ l'integrale generale è $y(x) = c_1 + c_2 x$. L'unica soluzione compatibile con le condizioni al bordo è $y(x) \equiv 0$.

Se $\lambda > 0$ l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^{\sqrt{2\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{2\lambda}x}$. Anche in questo caso l'unica soluzione compatibile con le condizioni al bordo è quella identicamente nulla.

Se $\lambda < 0$ l'integrale generale è $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-2\lambda}\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-2\lambda}\, x)$. Imponendo le condizioni al bordo si ottiene $c_1 = 0$, $c_2 \operatorname{sen}(3\sqrt{-2\lambda}) = 0$. Se si prende $\lambda = -\frac{1}{18}k^2\pi^2$, con $k \in \mathbb{N}$, si ottengono le soluzioni $y(x) = c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-2\lambda}\, x)$, con c_2 costante arbitraria.