ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Cosa significa

$$\sum_{n=6}^{+\infty} a_n = -\infty \ ?$$

2. Enunciare la definizione di integrale di Riemann di una funzione limitata in un intervallo.

3. Disegnare il grafico di f', se f ha il seguente grafico:

4. Dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x-2y} \ .$$

ANALISI MATEMATICA — PROVA DI TEORIA (22/12/2004)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare il criterio del confronto per le serie. Mostrarne un'applicazione. Se c'è tempo, provare il criterio.

---

2. Calcolare le radici cubiche di $-8i$.

---

3. Se $f(x)$ è una funzione continua, quanto vale la derivata di $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$? Disegnare il grafico di g, se f ha il seguente grafico:

---

4. Provare la verità o la falsità della seguente affermazione: Una funzione pari, derivabile su $\mathbf{R}$, ammette sempre in $x = 0$ un punto di minimo o di massimo relativo.

ANALISI MATEMATICA — PROVA DI TEORIA (22/12/2004)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare il criterio del confronto per le serie. Mostrarne un'applicazione. Se c'è tempo, provare il criterio.

---

2. Calcolare le radici cubiche di $-8i$.

---

3. Se $f(x)$ è una funzione continua, quanto vale la derivata di $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$? Disegnare il grafico di g, se f ha il seguente grafico:

---

4. Provare la verità o la falsità della seguente affermazione: Una funzione pari, derivabile su $\mathbf{R}$, ammette sempre in $x = 0$ un punto di minimo o di massimo relativo.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema di De L'Hôpital (in una delle sue varie versioni) e mostrarne un'applicazione.

2. Provare che la derivata di $\operatorname{arcsen} x$ vale ......

3. Cosa significa $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$?

4. Sia $f(x)$ una funzione regolare definita in un intorno di 0 tale che $\lim_{x \to 0} f(x)x^5 = 3$. Cosa si può dire delle derivate di f in 0?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare e commentare un risultato di approssimazione con polinomi tramite la formula di Taylor.

---

2. Provare che la derivata di $\operatorname{arctg} x$ vale ......

---

3. Cosa significa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3^+$?

---

4. Sia a_n una successione a termini positivi. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ diverge, si può dire qualcosa su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema di Weierstrass e commentare sull'utilità delle varie ipotesi.

2. Dimostrare che la funzione $\cos x$ è invertibile tra $[-\pi, 0]$ e $[-1, 1]$.

3. Cosa significa $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = 25$?

4. Mostrare che se f è monotòna su $[a, b]$, allora è integrabile secondo Riemann.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Studiare la continuità e l'esistenza delle derivate prima, seconda, etc. per la funzione

$$f(x) = x|x|\,.$$

2. Illustrare sinteticamente il metodo di integrazione per parti.

3. Trovare il polinomio di Taylor di grado 2 e centro $x_0 = \pi/2$ della funzione $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, e dare una valutazione del corrispondente resto se $x = \dfrac{1}{2}$.

4. Mostrare con esempi che la regola di l'Hôpital non vale se $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, ossia che in questo caso non si può dire nulla su $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Studiare continuità e derivabilità della funzione $f(x) = x\,|\operatorname{sen} x|$.

---

2. Illustrare sinteticamente il metodo di integrazione per sostituzione.

---

3. Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado n della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, mostrando come si arriva a tale formula.

---

4. Una funzione convessa $f(x)$ verifica $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 1$. Cosa c'è che non va?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Studiare continuità e derivabilità della funzione $f(x) = x\,|\operatorname{tg} x|$.

2. Dare la definizione di convessità e concavità di una funzione, ed enunciare un criterio per verificarle.

3. Trovare un intervallo disgiunto da $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$ in cui la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è invertibile. Scriverne l'inversa in funzione dell'ordinario arcsen, e disegnarne il grafico.

4. Supponiamo che $f(x)$ ammetta come asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, la retta $y = 3x + 5$. Si può dire che f è definitivamente crescente? Provarlo oppure mostrare con un controesempio che non è detto.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Studiare dominio, continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{x \operatorname{sen}^3 x}$.

---

2. Enunciare un risultato significativo che collega la teoria dell'integrale definito con la teoria del calcolo differenziale. Mostrarne un'applicazione.

---

3. Trovare un intervallo disgiunto da $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in cui la funzione $f(x) = \cos x$ è invertibile. Disegnarne il grafico. Che relazione c'è tra l'inversa così trovata e l'ordinario arccos?

---

4. Scrivere una funzione che ammetta derivate fino al terzo ordine in tutti i punti, ma che in qualche punto non sia derivabile quattro volte.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare il teorema della convergenza assoluta delle serie, e fare un esempio di applicazione. Se c'è tempo, dimostrarlo.

---

2. Mostrare che la derivata di $f(x) = \ln x$ vale...

---

3. Trovare un insieme in cui la funzione $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$ sia invertibile, scrivere la formula per la sua inversa e disegnarne il grafico.

---

4. Mostrare che il grafico di una funzione la cui derivata prima sia convessa interseca ogni retta al più tre volte.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema di Weierstrass. E' possibile trovare una funzione continua definita su $(0,1)$ che ammetta massimo assoluto? Commentare.

2. Dire cosa significa che una serie diverge. Le due affermazioni

$$a_n \to 0\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

sono tra loro compatibili o no? Commentare.

3. Trovare un intervallo in cui la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ sia invertibile, scrivere la formula per la sua inversa e disegnarne il grafico.

4. Mostrare che il grafico di una funzione la cui derivata prima sia concava attraversa ogni retta al più tre volte.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dare la definizione di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme E. Provare che si ha sempre

$$\inf E \leq \sup E\,.$$

2. Enunciare e dimostrare la regola per la derivata di un prodotto.

3. Come si può verificare la continuità di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in un punto usando solo limiti di successioni?

4. Utilizzando la teoria delle serie, trovare la frazione che genera il numero decimale periodico $0,3\overline{62}$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Spiegare l'operazione di determinazione delle radici n-esime di un numero nell'ambito dei numeri complessi.

2. Spiegare la differenza tra integrale definito e integrale indefinito.

3. Dare un esempio di una funzione con un punto angoloso, di una funzione con una cuspide, di una funzione con un flesso a tangente verticale.

4. Sia $f(x)$ una funzione positiva e regolare, definita su tutto $\mathbf{R}$, infinitesima a $\pm\infty$. Quanti flessi ha f come minimo?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Si dica cosa significa

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty\,.$$

Verificare quindi che

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = +\infty\,.$$

---

2. Enunciare il teorema sul limite delle successioni crescenti, e indicarne un'applicazione alle serie.

---

3. Dare la definizione di derivata parziale di una funzione di due variabili.

---

4. Enunciare e dimostrare una formula per la derivata seconda della funzione inversa.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dare la definizione generale di limite di funzione (quella con gli intorni), e particolarizzarla nel caso

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\,.$$

2. Dire in quali punti il grafico della funzione

$$f(t) = |\operatorname{tg} t|$$

ammette retta tangente, e scrivere l'equazione di tale retta.

3. Enunciare il teorema di Weierstrass, commentando sull'importanza di ciascuna delle ipotesi.

4. Dimostrare che la derivata di una funzione pari è dispari, e viceversa.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Supponiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2\,.$$
Si può dire che f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$?

2. Dire in quali punti il grafico della funzione
$$f(t)=|\cos t|$$
ammette retta tangente, e scrivere l'equazione di tale retta.

3. Enunciare il teorema di De L'Hopital alle forme indeterminate del tipo ∞/∞, e darne qualche applicazione.

4. Mostrare che l'integrale indefinito di una funzione pari contiene una funzione dispari, e che quello di una funzione dispari è costituito da funzioni pari.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di funzione inversa di una funzione data, ed enunciare un risultato significativo sulle funzioni inverse.

---

2. Trovare costanti a, b e c tali che

$$e^{3x} = a + b\,(x-1) + c\,(x-1)^2 + o((x-1)^2) \qquad \text{per } x \to 1.$$

---

3. Utilizzare il teorema di esistenza degli zeri per provare l'esistenza di almeno una soluzione $x \in \mathbf{R}$ di

$$e^x = 5 - x\,.$$

---

4. E' vero che, se f e g sono funzioni positive, allora

$$\sup_{x\in I}(f(x)\cdot g(x)) = \sup_{x\in I} f(x)\cdot \sup_{x\in I} g(x)\ ?$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di integrale improprio di una funzione continua in un intervallo del tipo $[a, +\infty)$; dare un esempio di funzione il cui integrale in $[a, +\infty)$ sia convergente e un esempio di funzione il cui integrale in $[a, +\infty)$ sia divergente.

---

2. Sia $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 3 & \text{se } x \in [1, 2) \\ 2 & \text{se } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Dire perché f è integrabile secondo Riemann in $[0, 3]$, e calcolare

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

---

3. Utilizzare il teorema di esistenza degli zeri per provare l'esistenza di almeno una soluzione x dell'equazione

$$\ln x = \operatorname{arctg} x\,.$$

---

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dare la definizione di integrale improprio di una funzione continua in un intervallo del tipo $[0, 1)$ ma non limitata in un intorno sinistro di 1; dare un esempio di funzione il cui integrale in $[0, 1)$ sia convergente e un esempio di funzione il cui integrale in $[0, 1)$ sia divergente.

2. Data la funzione $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^3)$, disegnarne il dominio, e disegnarne il gradiente nel punto $(1, 0)$.

3. Trovare un intervallo in cui la funzione $f(x) = x - \cos 2x$ sia invertibile.

4. Mostrare che una funzione convessa in un intervallo chiuso e limitato ammette un solo punto di minimo assoluto oppure ne ammette infiniti.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema della permanenza del segno (per limiti di funzioni), e se c'è tempo darne la dimostrazione.

2. Illustrare i principali tipi di punti di non derivabilità di una funzione continua, illustrandoli con esempi.

3. Trovare un intervallo disgiunto da $[0, \pi]$ in cui la funzione $f(x) = \cos x$ sia invertibile, e disegnare il grafico della funzione inversa f^{-1} così ottenuta.

4. Sia f una funzione derivabile 3 volte in un intervallo I, che si annulli in 4 punti distinti di I. Mostrare che la derivata terza di f si annulla in almeno un punto di I.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Spiegare perché se un insieme numerico E ammette massimo, tale massimo è anche estremo superiore di E.

2. Enunciare il teorema di continuità delle funzioni composte, mostrando con controesempi che se una delle funzioni in gioco non è continua, allora il risultato non è vero.

3. Dire se la funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si può prolungare su tutto $\mathbf{R}$ in modo da ottenere una funzione derivabile.

4. Trovare una funzione positiva, tendente a zero per $x \to +\infty$, ma non definitivamente decrescente.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare il criterio del rapporto per la convergenza delle serie. Mostrare un esempio significativo in cui tale criterio permette di determinare il carattere di una serie, e un esempio significativo in cui il criterio non fornisce alcun risultato.

---

2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e limitata. Dire quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente vere, e perché:
a) esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
b) esiste $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) \in \mathbf{R}$;
c) esiste $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)$;
d) esiste una primitiva di f;
e) f è la primitiva di una funzione.

---

3. Illustrare le principali proprietà della funzione $\arccos x$.

---

4. Trovare un intervallo in cui è possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$. Perché l'intervallo $[-\pi\,, \pi]$ non va bene?

ANALISI MATEMATICA PROVA DI TEORIA (24/7/2007)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Fornire un esempio significativo di una serie alla quale si applichi il teorema della convergenza assoluta.

---

2. Trovare una successione monotòna tale che il suo estremo superiore valga 5, e quello inferiore valga 2. Quanto vale il limite?

---

3. Illustrare sinteticamente le principali proprietà della funzione $\operatorname{sh} x$ e della sua inversa.

---

4. Trovare una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo I, ma non appartenente a $C^1(I)$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Fornire un esempio significativo di una serie alla quale si applichi il criterio della radice.

---

2. Trovare un intervallo diverso da $[0, \pi]$ in cui invertire la funzione $\cos x$, e descrivere l'inversa così ottenuta. Disegnarne il grafico.

---

3. Disegnare il grafico di $f'(x)$, se quello di $f(x)$ è il seguente:

---

4. Trovare una funzione $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f'(0) = 0$, ma tale che $x = 0$ non sia né massimo relativo, né minimo relativo, né flesso.

ANALISI MATEMATICA PROVA DI TEORIA (31/7/2007)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Fornire un esempio significativo di una serie alla quale si applichi il criterio del rapporto.

---

2. Trovare un intervallo diverso da $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in cui invertire la funzione $\operatorname{sen} x$, e descrivere l'inversa così ottenuta. Disegnarne il grafico.

---

3. Disegnare il grafico di $f'(x)$, se quello di $f(x)$ è il seguente:

---

4. Trovare una funzione $f(x) \; : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f'(0) = 0$, ma tale che $x = 0$ non sia né massimo relativo, né minimo relativo, né flesso.

ANALISI MATEMATICA — PROVA DI TEORIA (31/7/2007)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Fornire un esempio significativo di una serie alla quale si applichi il criterio della convergenza assoluta.

---

2. Trovare un intervallo diverso da $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ in cui invertire la funzione $\operatorname{tg} x$, e descrivere l'inversa così ottenuta. Disegnarne il grafico.

---

3. Disegnare il grafico di $f'(x)$, se quello di $f(x)$ è il seguente:

---

4. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, si può dire qualcosa di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^5$? E di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/5}$?

ANALISI MATEMATICA PROVA DI TEORIA (19/12/2007)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema "dei carabinieri" (o del confronto) per i limiti di funzioni, e darne un'applicazione significativa.

2. Trovare un intervallo in cui si può invertire la funzione $f(x) = \cos e^x$. Disegnare il grafico della funzione inversa così ottenuta.

3. Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$\log_{1/2} x = \operatorname{tg} x\,.$$

4. Dimostrare che una funzione concava in $\mathbf{R}$ ammette sempre limite per $x \to +\infty$.

ANALISI MATEMATICA PROVA DI TEORIA (20/12/2007)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare le principali proprietà delle funzioni monotone.

---

2. Enunciare il teorema di Rolle. Dire, senza fare calcoli, in quanti punti si annulla la derivata della funzione $f(x) = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$.

---

3. Trovare una successione a_n tale che $\sup a_n = 3$, $\inf a_n = -1$.

---

4. Sia $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte t.c. $\lim_{x \to +\infty} f''(x) = 2$. Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = x^{2/3}, \qquad f_2(x) = x^{5/3}, \qquad f_3(x) = x^{1/4}, \qquad f_4(x) = x^{-2/3}, \qquad f_5(x) = x^{\pi}.$$

---

2. Dare la definizione **generale** di limite di una funzione (con gli intorni). Applicarla spiegando il significato dell'affermazione

$$\lim_{x \to 6} f(x) = +\infty.$$

---

3. Trovare due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe illimitate in un intorno destro di 1, tali che

$$\int_1^2 f(x)\, dx \quad \text{converga}, \qquad \int_1^2 g(x)\, dx \quad \text{diverga}.$$

---

4. Trovare una funzione dispari $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che non sia monotona in nessun intorno di $x = 0$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = 3^{-x}\,, \qquad f_2(x) = \log_\pi x\,, \qquad f_3(x) = \log_\pi |x|\,, \qquad f_4(x) = \log_{1/\pi} |x|\,,$$

---

2. Descrivere l'insieme di convergenza di una serie di potenze. Fare un paio di esempi significativi.

---

3. Mostrare che la funzione $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ è invertibile nel suo dominio. Trovare il dominio di f^{-1}, e calcolare la derivata di f^{-1} nel punto $y = 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

---

4. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione convessa tale che $f(0) = f(1) = 1$, $f'(1) = 1$. Trovare delle limitazioni per $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

ANALISI MATEMATICA PROVA DI TEORIA (15/1/2008)

Dedicato a Gene Krupa (15 gennaio 1909–16 ottobre 1973)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \arccos x\,, \qquad f_2(x) = \arccos|x|\,, \qquad f_3(x) = \log_5|x|\,, \qquad f_4(x) = |\log_5 x|\,,$$

---

2. Enunciare alcune delle principali proprietà delle funzioni continue in un intervallo.

---

3. Scrivere la formula di Taylor-MacLaurin, con il resto nella forma di Lagrange, per la funzione $\operatorname{sh} x$. Se c'è tempo, utilizzarla per calcolare $\operatorname{sh}\dfrac{1}{10}$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

---

4. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione concava tale che $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, $f'(0) = 1$. Trovare delle limitazioni per $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Trovare il dominio e disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)\,, \qquad g(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)\,.$$

2. Enunciare il teorema sulla derivata delle funzioni composte, e darne un'applicazione ad un esempio.

3. Se sappiamo che una serie della forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ converge per $x = 5$ e non converge per $x = -2$, cosa possiamo dire sul suo insieme di convergenza?

4. Trovare esplicitamente una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che sia derivabile in tutti i punti ma che non ammetta derivata seconda in almeno un punto.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Sia $f : [0,4] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,2) \\ 3 & \text{se } x \in [2,3) \\ 0 & \text{se } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Dire se f è integrabile secondo Riemann, e calcolare

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

---

2. Criterio per la decrescenza di funzioni, e (se c'è tempo) sua dimostrazione.

---

3. Cosa significa $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} a_n = -\infty$?

---

4. Trovare esplicitamente una funzione che tenda a $-\infty$ per $x \to +\infty$ senza essere definitivamente decrescente.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Definire i seguenti concetti: minorante, minimo, estremo inferiore di un insieme (con qualche esempio)

---

2. Trovare le radici quarte di -4 nel campo complesso.

---

3. Enunciare e dimostrare la formula per la derivata di $f(x) = a^x$.

---

4. Sia $f(x)$ una funzione Riemann-integrabile in $[a, b]$. Mostrare che

$$\lim_{\omega \to b^-} \int_a^{\omega} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Trovare il dominio e, senza fare derivate, disegnare un grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \cos(\operatorname{arcsen} x)\,.$$

2. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri negativi. Cosa si può dire sulla successione $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$?

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,3) \\ 5 & \text{se } x \in [3,6) \\ 8 & \text{se } x \in [6,7]. \end{cases}$$

Dire se f è Riemann-integrabile in $[0,7]$, e disegnare il grafico di

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

4. Dire se la somma e il prodotto di due funzioni continue in $(a,b]$ e integrabili in senso improprio in $[a,b]$ sono ancora funzioni integrabili in senso improprio in $[a,b]$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di

$$\inf_{x \in I} f(x),$$

dove I è un intervallo di $\mathbf{R}$, e $f(x) : I \to \mathbf{R}$. Calcolare

$$\inf_{x \in (-\frac{\pi}{4}, \pi)} \operatorname{sen}^3 x.$$

---

2. Dare un esempio significativo in cui si usa il teorema del confronto (noto anche come teorema dei carabinieri) per i limiti di successioni.

---

3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false, e spiegare sinteticamente perché:

Una serie a termini negativi:

a) converge sempre;
b) diverge sempre;
c) può solo divergere o convergere;
d) converge se e solo se converge assolutamente;
e) potrebbe convergere, ma in tal caso non è detto che converga assolutamente;
f) converge se e solo se il termine generico è infinitesimo.

---

4. Sia $f(x)$ una funzione reale definita in (a, b). Provare che, se $\lim_{x \to b^-} f'(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di

$$\inf_{x\in I} f(x)\,,$$

dove I è un intervallo di $\mathbf{R}$, e $f(x)\ :\ I \to \mathbf{R}$. Calcolare

$$\inf_{x\in(-\frac{\pi}{4},\pi)} \operatorname{sen}^3 x\,.$$

---

2. Dare un esempio significativo in cui si usa il teorema del confronto (noto anche come teorema dei carabinieri) per i limiti di successioni.

---

3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false, e spiegare sinteticamente perché:

Una serie a termini negativi:

a) converge sempre;
b) diverge sempre;
c) può solo divergere o convergere;
d) converge se e solo se converge assolutamente;
e) potrebbe convergere, ma in tal caso non è detto che converga assolutamente;
f) converge se e solo se il termine generico è infinitesimo.

---

4. Trovare una funzione $f(x)$ di classe $C^1(\mathbf{R})$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ma $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ non esiste.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Trovare un intervallo in cui la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ è invertibile, e –fissato tale intervallo– dire dove è definita la funzione inversa.

2. Dare la definizione di cuspide. Come è fatto il grafico della derivata prima vicino ad una cuspide?

3. Enunciare il teorema "ponte" tra limiti di successioni e limiti di funzioni, e darne un'applicazione significativa.

4. Una funzione concava su $\mathbf{R}$ ammette sempre limite per $x \to -\infty$?

ANALISI MATEMATICA PROVA DI TEORIA (23/9/2008)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il Teorema di Lagrange, e commentare l'utilità di ciascuna ipotesi.

2. Dare la definizione di punto angoloso. Come è fatto il grafico della derivata prima vicino ad un punto angoloso?

3. Dire che cos'è la somma di una serie numerica.

4. Se $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = -5$, cosa si può dire su $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Teorema sui limiti di funzioni monotone: enunciato ed un esempio.

---

2. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = 2x^2 - y$ nella direzione individuata dal vettore $(1, 2)$.

---

3. Dire che cos'è l'estremo inferiore di una successione.

---

4. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, cosa si può dire su $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Tenendo conto della teoria delle serie numeriche, dire quanto vale

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \,.$$

---

2. Enunciare una versione del teorema di De l'Hôpital, e dare un esempio di sua applicazione.

---

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - xy \,.$$

---

4. Verificare, **usando la definizione di limite,** che

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x + 1} = 2 \,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \frac{1}{n}}$$

2. Trovare il piano tangente al grafico di $f(x, y) = \sqrt[5]{x^2 y - 3}$ nel punto corrispondente a $(x, y) = (2, 1)$.

3. Quante primitive ammette una funzione continua in un intervallo?

4. Dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Tenendo conto della teoria delle serie numeriche, dire quanto vale

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

2. Enunciare una versione del teorema di De l'Hôpital, e dare un esempio di sua applicazione.

3.

$$\int_a^b f'(x)\,dx = ?? \qquad \text{(completare)}$$

4. Verificare, **usando la definizione di limite,** che

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Tenendo conto della teoria delle serie numeriche, dire se è finita o no la quantità

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \, .$$

2. Come si "legge" la disuguaglianza

$$|f(x)| \leq 2 + |x| \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

in termini del grafico di f ?

3.

$$\frac{d}{dx} \int_x^5 \operatorname{sen} t^2 \, dt = ?? \qquad \text{(completare)}$$

4. Verificare, **usando la definizione di limite,** che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{4 - \frac{5}{n}} = 2 \, .$$

ANALISI MATEMATICA 1 PROVA DI TEORIA (10/3/2009)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \frac{1}{n}}$$

---

2. Trovare la retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 3}$ nel punto di ascissa 2.

---

3. Quante primitive ammette una funzione continua in un intervallo?

---

4. Dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare le proprietà più significative delle funzioni crescenti in un intervallo.

---

2. Trovare la parabola che "meglio approssima" il grafico di $f(x) = \operatorname{sen} x$ vicino al punto di ascissa $x = \pi/3$.

---

3. Alla richiesta di calcolare l'integrale indefinito di $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, uno studente risponde:

$$\operatorname{arcsen} x + c\,,$$

un altro risponde

$$-\arccos x + c\,.$$

Chi dei due ha ragione, e come si spiega la cosa?

---

4. Dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 0\,, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+ \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Relazioni tra limiti e funzioni monotòne.

2. Spiegare la notazione degli "o piccoli" (notazione di Landau).

3. Cos'è una serie di potenze? Trovare una serie di potenze che converga per $x = 1$ e $x = -2$ e che non converga per $x = 5$.

4. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0\,, \ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^- \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Limiti di successioni monotòne.

2. Enunciare il teorema di Fermat sugli estremi relativi di una funzione. Cosa implica tale teorema per la ricerca di massimo e minimo assoluti di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$?

3. Come si definisce $\sup_{x \in I} f(x)$? Trovare $\sup_{x \in (-2,1)} x^2$.

4. Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l > 0\,, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Data la successione

$$a_n = \frac{n+3}{n-1}\,, \quad n = 2, 3, \dots\,,$$

quanto valgono $\sup\limits_n a_n$ e $\inf\limits_n a_n$?

---

2. Che cos'è l'immagine di una funzione? Come è fatta l'immagine di una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato?

---

3. Scrivere la formula di Taylor (con resto di Peano) di ordine 3 per la funzione $f(x) = \ln x$ con punto iniziale e.

---

4. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0\,, \ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^- \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Data la successione

$$a_n = 1 + \frac{3}{n}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

dire quanto valgono $\sup\limits_n (a_1 + \ldots + a_n)$ e $\inf\limits_n (a_1 + \ldots + a_n)$?

2. Enunciare il teorema di esistenza degli zeri e, se c'è tempo, darne brevemente la dimostrazione.

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $|x|^\alpha$ è derivabile nell'origine.

4. Siano $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili in un intervallo, e sia $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. h è continua? h è derivabile?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Data una funzione strettamente crescente in $[0,1]$, allora possiamo concludere che:
a) è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$;
b) è continua in $[0,1]$;
c) è derivabile in $[0,1]$;
d) è iniettiva in $[0,1]$;
e) è biettiva tra $[0,1]$ e $[f(0), f(1)]$;
f) è limitata in $[0,1]$;
g) ammette limite per $x \to 1^-$.
Dire quali affermazioni sono sicuramente vere, motivando le risposte.

2. Enunciare il teorema della media e, se c'è tempo, darne la dimostrazione.

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $|x|^\alpha$ ha una cuspide nell'origine.

4. Per quali $\alpha > 0$ la funzione $|\operatorname{arctg} x|^\alpha$ è lipschitziana in $\mathbf{R}$?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Ordinare i seguenti infiniti, per $n \to +\infty$:

$$n + \sqrt{n}\,, \qquad n\,(3 + \log n^2)\,, \qquad \sqrt[4]{n!}\,.$$

---

2. Enunciare il teorema di Rolle e, se c'è tempo, darne la dimostrazione.

---

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione x^α ha un flesso nell'origine.

---

4. Per quali $\alpha > 0$ la funzione $|\log x|^\alpha$ è lipschitziana in $(0, +\infty)$?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = ??$$

2. Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange.

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni elementari:

$$\log|x|\,, \qquad |\log x|\,, \qquad \log_{1/2} x\,, \qquad \log(2-x)\,.$$

4. Mostrare **usando la definizione di integrale di Riemann** (quindi senza usare il teorema fondamentale) che

$$\int_0^2 x\,dx = 2\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = ??$$

---

2. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni elementari:

$$2^{-x}, \qquad 2^{|x|}, \qquad 2^{2-x}, \qquad 2^{1/x}.$$

---

4. Sia f una funzione di classe $C^2([0,2])$ tale che $f(0) = f(1) = f(2)$. Dimostrare che esiste un punto in cui la derivata seconda di f si annulla.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dimostrare che

$$\frac{d}{dx} \ln x = ??$$

---

2. Enunciare il teorema dei valori intermedi per funzioni continue. Fornire un esempio concreto in cui il teorema permette di ottenere conclusioni significative.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\operatorname{sen}(-x)\,, \qquad \operatorname{sen}|x|\,, \qquad |\operatorname{sen} x|\,, \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,.$$

---

4. Dire quanto vale

$$\inf_{f \in \mathbf{X}} \int_0^1 f(x)\,dx\,,$$

dove $\mathbf{X}$ è l'insieme delle funzioni continue in $[0, 1]$, non negative, tali che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dimostrare che (per $n \in \mathbf{N}$)

$$\frac{d}{dx} x^n = ??$$

---

2. Enunciare il teorema di esistenza degli zeri delle funzioni continue, e darne una dimostrazione sintetica, specificando come si usa l'ipotesi di continuità.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\operatorname{arctg}(-x)\,, \qquad \operatorname{arctg}|x|\,, \qquad |\operatorname{arctg} x|\,, \qquad \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,.$$

---

4. Dire quanto vale

$$\sup_{f \in \mathbf{X}} \int_0^1 f(x)\,dx\,,$$

dove $\mathbf{X}$ è l'insieme delle funzioni continue e concave in $[0,1]$ tali che $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dimostrare (usando la definizione di derivata come limite) che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = ??$$

---

2. Che cos'è la somma di una serie? Fare l'esempio di una serie convergente la cui somma valga 2.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\arccos(-x)\,, \qquad \arccos|x|\,, \qquad |\arccos x|\,, \qquad \arccos\frac{1}{x}\,.$$

---

4. Dire quanto vale

$$\inf_{f\in\mathbf{X}} \int_0^1 f(x)\,dx\,,$$

dove $\mathbf{X}$ è l'insieme delle funzioni continue e concave in $[0,1]$ tali che $f(0)=0$, $f(1)=-1$, $f'(0)=1$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dimostrare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ??$$

---

2. Che relazione c'è tra integrali definiti e integrali indefiniti?

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:
$$\ln(-x)\,, \qquad \ln|x|\,, \qquad 2+\ln(x+3)\,, \qquad \ln^2 x\,.$$

---

4. Fare un esempio esplicito di una successione positiva e infinitesima, ma non definitivamente decrescente.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Che cos'è una funzione iniettiva? Fare esempi significativi di funzioni iniettive e non.

---

2. Cosa dice il teorema di Peano per il polinomio di Taylor? Come si particolarizza nel caso del polinomio di Mac Laurin della funzione $\cos x$?

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\operatorname{tg}|x|\,, \qquad |\operatorname{tg} x|\,, \qquad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\,.$$

---

4. Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente. Calcolare $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Che cos'è una funzione suriettiva? Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = e^x - \alpha x$ è suriettiva.

2. Fare un esempio significativo esplicito di una funzione che ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

3. Enunciare il criterio del confronto per serie.

4. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I. Provare che se f ammette due punti di massimo relativo, allora ammette anche un terzo punto critico.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Senza fare calcoli, disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{-x}\,, \qquad \sqrt{|-x|}\,, \qquad \ln(\ln x)\,, \qquad \log_x x^2\,.$$

---

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$.

---

3. Dire quando una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ si dice limitata inferiormente. Dare la definizione dell'estremo inferiore di f su (a, b).

---

4. Trovare, sotto opportune ipotesi, una formula per la derivata seconda della funzione inversa di una funzione f definita in un intervallo (a, b).

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Data la successione

$$a_n = \frac{3+n}{n}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

dire quanto valgono $\sup_n a_n$ e $\inf_n a_n$.

2. Come è fatta l'immagine di una funzione continua in un intervallo? Se c'è tempo, potete dimostrare quanto asserito?

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $\sqrt{|x|^\alpha}$ è derivabile nell'origine.

4. Dimostrare che una successione crescente e limitata superiormente è convergente.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Spiegare il significato dell'affermazione

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5\,.$$

2. Funzione inversa: definizione e principali proprietà.

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $\operatorname{sen}|x|^\alpha$ è derivabile nell'origine.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Spiegare (adattando a questo caso la definizione di limite) il significato dell'affermazione

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5\,.$$

Fare un esempio significativo di una funzione che verifica questa proprietà.

---

2. Mostrare che la funzione $f(x) = 3x + \operatorname{sen} x$ è invertibile. Enunciare le proprietà principali della funzione inversa.

---

3. Enunciare il criterio della convergenza per le serie, con un esempio di applicazione.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Spiegare il significato dell'affermazione

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n = 5\,.$$

Fare un esempio significativo di una successione che verifica questa proprietà.

2. Trovare un intervallo in cui la funzione $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ sia invertibile. Enunciare le proprietà principali della funzione inversa così ottenuta.

3. Enunciare il criterio del confronto (detto dei carabinieri) per le funzioni di una variabile reale.

4. Sia f una funzione derivabile due volte in x_0. Usando lo sviluppo di Taylor, mostrare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0)\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dare la definizione di serie convergente. Spiegare i legami che ci sono tra la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e la convergenza della successione $\{a_n\}$.

2. Fornire la definizione della funzione $\ln x$ ed enunciare le sue principali proprietà.

3. Enunciare il Teorema di Rolle.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di serie divergente. Dare qualche condizione sufficiente affinché una serie diverga.

---

2. Dimostrare che $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ per x e y positivi.

---

3. Enunciare il teorema della permanenza del segno per funzioni.

---

4. Dimostrare che se $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 2$, allora $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ vale ...?

ANALISI MATEMATICA 1 PROVA DI TEORIA (3/3/2010)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di derivata e, usando tale definizione, provare che

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \ldots ?$$

---

2. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ con punto iniziale $x_0 = 2$.

---

3. Descrivere le serie geometriche.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Trovare la retta tangente al grafico delle funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ nel punto di ascissa 4.

---

2. Che cos'è l'estremo superiore di un insieme $E \subset \mathbf{R}$?

---

3. Che cos'è una funzione strettamente crescente? Come si verifica che una funzione è strettamente crescente?

---

4. Provare che la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$$

converge a 1.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 (con il resto nella forma di Lagrange) per la funzione $y = \sqrt{x+5}$ nel punto di ascissa 4.

2. Trovare una funzione $f(x)$ avente nel punto $x = 2$ un punto critico che non sia di estremo relativo.

3. Che cos'è una funzione convessa? Come si verifica che una funzione è convessa?

4. Provare, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{3x^2 - x} = \frac{5}{3}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione generale di limite (quella con gli intorni). Particolarizzare la definizione per spiegare cosa significa

$$\lim_{x\to -3} f(x) = 5\,.$$

---

2. Trovare una funzione $f(x)$ tale che ammetta minimo assoluto pari a 2 e sia illimitata superiormente.

---

3. Dire quali sono le forme indeterminate che possono comparire quando si fanno limiti della forma

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\,,$$

fare almeno un esempio di forma indeterminata di questo tipo e risolverla.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Spiegare (usando la definizione di estremo inferiore) l'affermazione

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} a_n = 1\,.$$

2. Dare la definizione di ordine di infinitesimo di una funzione per $x \to x_0 \in \mathbf{R}$.

3. Dare la definizione di punto angoloso di una funzione. Si descriva il grafico **della derivata** di una funzione nell'intorno di un punto angoloso.

4. Dimostrare che per una successione decrescente il limite esiste e coincide con l'estremo inferiore.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Spiegare (usando la definizione di estremo superiore) l'affermazione

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} a_n = +\infty\,.$$

---

2. Dare la definizione di punto di minimo relativo di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Indicare un metodo per individuare eventuali punti di minimo relativo.

---

3. Dire come si definisce la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Dimostrare che la sua derivata prima vale...

---

4. Provare o confutare la seguente affermazione: una funzione convessa $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che ammette due punti di minimo relativo in realtà ne ammette infiniti.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Spiegare (usando la definizione di limite) l'affermazione

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -5\,.$$

2. Dare la definizione della funzione $\operatorname{arcsen} x$, dire quanto vale la sua derivata, e infine trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x = 1/4$.

3. Enunciare il teorema "ponte" tra limiti di successioni e limiti di funzioni, e darne un'applicazione.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Sia $[x] = \max\{n \in \mathbf{Z} \;:\; n \leq x\}$ la *parte intera* di $x \in \mathbf{R}$, e sia $\{x\} = x - [x]$ la *parte frazionaria* di x. Disegnare il grafico delle due funzioni, e studiare la continuità di $\{x\}$.

---

2. Quali tra le seguenti successioni sono monotone? Quali limitate?

$$a_n = \frac{n-1}{n}\,, \qquad b_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}\,, \qquad c_n = (-1)^n \ln n\,, \qquad d_n = \frac{1}{n-\pi}\,.$$

$(n = 1, 2, \ldots)$

---

3. Cos'è una primitiva di una funzione? Quante primitive ammette una funzione continua in $\mathbf{R}$?

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema della convergenza assoluta per le serie, con almeno un esempio significativo di applicazione.

2. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \log_a x$ al variare del parametro a. Provare che

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \text{per ogni } x, y > 0.$$

3. Cos'è il limite di una successione? Fare un esempio, diverso da $(-1)^n$, di successione che non ammette limite.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

2. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x) = x\,|\operatorname{sen} x|$.

3. Scrivere e giustificare lo sviluppo di MacLaurin di $\operatorname{sen} x$ fino all'ordine n.

4. Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte in $\mathbf{R}$. Mostrare che se esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = 5$, $f'(x_3) = 0$, allora esiste un punto in cui f'' si annulla.

ANALISI MATEMATICA 1 PROVA DI TEORIA (19/2/2009)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dire cosa significa l'affermazione che l'estremo superiore di una successione di numeri reali vale $+\infty$.

---

2. Enunciare le principali proprietà delle funzioni continue in un intervallo $[a, b]$.

---

3. Trovare un intervallo di invertibilità per la funzione $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - x$ e disegnare il grafico della funzione inversa.

---

4. Verificare, **usando la definizione di limite,** che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 .$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di successione limitata. Dare la definizione di estremo inferiore di una successione limitata.

2. Convergenza della serie armonica generalizzata.

3. Radici di un numero complesso. Trovare le radici quarte di 16 nei complessi.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biettiva.

2. Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie, con almeno un esempio.

3. Cos'è il modulo di un numero complesso? Trovare tutti i numeri complessi z tali che $z^2 = -|z|^2$.

4.

ANALISI MATEMATICA 1 PROVA DI TEORIA (4/2/2011)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Trovare la derivata delle due seguenti funzioni

$$f(x) = \int_5^x \operatorname{sen}(t^4)\, dt\,, \qquad g(x) = \int_{x^2}^x \operatorname{sen}(t^4)\, dt\,.$$

---

2. Enunciare (e, se c'è tempo, dimostrare) il teorema di Lagrange.

---

3. Trovare tutti i numeri complessi z tali che $z^6 = -i$.

---

4. Trovare una funzione che, per $x \to 0$, vada a zero più rapidamente di qualsiasi potenza di x.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2},$$

dimostrare che è invertibile in $\mathbf{R}$. Successivamente trovare una formula per la derivata della funzione inversa nel punto $y = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{4}$.

---

2. Enunciare (e, se c'è tempo, dimostrare) il teorema di Rolle.

---

3. Dimostrare che $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ per x e y positivi.

---

4. Trovare una funzione che nell'origine sia derivabile due volte ma non tre.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Considerare la seguente affermazione:

$$\forall x \in \mathbf{R} \ \ \exists n \in \mathbf{N} \text{ tale che la coppia } (x, n) \text{ verifichi una certa proprietà } \mathcal{P}.$$

Cosa devo fare se voglio provare che la precedente affermazione è falsa?

2. Enunciare il teorema di Weierstrass. Come è fatta l'immagine di una funzione continua su un intervallo $[a, b]$?

3. Dare la definizione di derivata di una funzione in un punto. Determinare la derivata di $f(x) = x^3$ calcolando il limite del rapporto incrementale.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Come è fatta l'immagine di una funzione continua in un intervallo?

2. Dimostrare che la derivata del prodotto $f(x)g(x)$ vale....

3. Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, cosa possiamo dire sulla successione $\{a_n\}$? E se la serie diverge?

4. Trovare una funzione $f(x)$ convessa definita su $(0,+\infty)$ e tale che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, oppure dimostrare che non è possibile.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dimostrare che la funzione $\operatorname{tg} x$ è invertibile in $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, dire dove è definita l'inversa f^{-1} così determinata, e disegnare il grafico di f^{-1}.

---

2. Scrivere le derivate di $(f(x))^3$ e di $f(x^3)$, giustificando le risposte. (f è una funzione generica)

---

3. Dare la definizione di serie convergente. Esibite una serie di cui sapete **dimostrare** la convergenza.

4.

ANALISI MATEMATICA 1 PROVA DI TEORIA (25/2/2011)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle funzioni

$$2^x\,, \qquad 2^{1/x}\,, \qquad 2^{|x|}\,, \qquad 2^{|x-2|}\,.$$

---

2. Giustificare la formula per la derivata del rapporto di due funzioni.

---

3. Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie, con almeno un esempio di applicazione.

---

4. Dimostrare che se f è una funzione convessa in (a,b), allora esiste $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x+1}$ nel punto $x_0 = 1$.

---

2. Calcolare l'area dell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 \le y \le 8 - x^2\right\}$$

---

3. Enunciare il criterio della convergenza assoluta per le serie, con almeno un esempio di applicazione.

---

4. Data una funzione $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabile e tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad f(0) < 0\,,$$

dimostrare che la funzione $g(x) = (f(x))^2$ ha almeno tre punti critici.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dire se la successione definita da $a_n = 2n + \operatorname{sen} n$ $(n = 1, 2, \dots)$ è:
a) monotona;
b) limitata superiormente;
c) limitata inferiormente.
(Ricordare la definizione di ciascuna di queste proprietà).

2. Calcolare l'area dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x^2 \le y \le 2 - |x|\}$$

3. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Che cos'è l'estremo superiore di un insieme? Mostrare che $\sup_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{n^2}{n^2+3} = \ldots$

2. Calcolare l'area dell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 4\,,\ y \geq 1\right\}.$$

3. Enunciare il teorema di esistenza degli zeri, ed evidenziarne le principali conseguenze.

4. Sia f una funzione derivabile due volte su $\mathbf{R}$ tale che $f''(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Che cos'è l'estremo superiore di un insieme? Mostrare che $\sup_{x\in\mathbf{R}} \dfrac{x^2}{x^2+5} = \dots$

2. Calcolare l'area del cerchio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

3. Enunciare il teorema della derivata della funzione inversa, con un esempio.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema del confronto (dei carabinieri), con un esempio pratico di uso di questo teorema.

2. Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f(x) = \ln(1 + 3|x|^{\alpha})$, con $\alpha > 0$.

3. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per la convergenza delle serie a termini di segno alterno.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema del confronto (dei carabinieri) per successioni, con un esempio pratico di uso di questo teorema.

2. Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f(x) = \operatorname{sen}(|x|^\alpha)$, con $\alpha > 0$.

3. Teorema di Lagrange e interpretazione geometrica.

4. Dimostrare che una funzione continua su $\mathbf{R}$, tale che $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, ammette sempre almeno uno zero.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dare la definizione di serie convergente. Fare un esempio di una serie che converge a 1.

---

2. Disegnare i grafici di f e della sua derivata nei pressi di una cuspide.

---

3. Che relazione c'è tra due primitive di una stessa funzione $f(x)$ in un intervallo? Sapete provarlo?

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare la derivata di $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nel punto $x_0 = 2$.

---

2. Disegnare il grafico di una funzione avente un punto di flesso, e successivamente disegnare il grafico della derivata di quella stessa funzione.

---

3. Enunciare il teorema di De l'Hôpital in una delle sue versioni, e applicarlo ad un esempio.

---

4. Sia f una funzione concava in $[0, 2]$ tale che $f(0) = f(2) = 0$, $f(1) = 1$. Trovare delle stime dall'alto e dal basso per $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare la derivata di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ nel punto $x_0 = 1$.

---

2. Dare la definizione di funzione strettamente decrescente in un intervallo, e fornire un criterio per determinare la stretta decrescenza (con almeno un esempio).

---

3. Che relazioni ci sono tra la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e la convergenza della successione $\{a_n\}$?

---

4. Trovare l'estremo inferiore di

$$V = \left\{ \int_0^1 f(x)\,dx \ : \ f(x) \text{ continua in } [0,1]\,,\ f(x) \geq 0 \text{ in } [0,1]\ ,\ f(1) = 2 \right\}$$

e dire se è un minimo.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x}$ nel punto $x = 3$.

---

2. Enunciare il teorema di esistenza degli zeri delle funzioni continue e, se c'è tempo, dimostrarlo.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\ln|x|\,, \qquad \ln(|x|^2)\,, \qquad \ln|x-1|\,, \qquad |\ln x|\,,$$

---

4. Trovare l'estremo superiore di

$$V = \left\{ \int_0^1 f(x)\,dx \ : \ f(x) \text{ continua in } [0,1]\,,\ f(x) \leq 3 \text{ in } [0,1]\ ,\ f(1) = 2 \right\}$$

e dire se è un massimo.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare la derivata di $f(x) = 2^x$ nel punto $x = 3$.

---

2. Spiegare perché il teorema fondamentale del calcolo integrale è fondamentale.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\cos|x|\,, \qquad |\cos x|\,, \qquad \cos|x-1|\,, \qquad \cos\frac{1}{x}\,.$$

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Come trovare i massimi e i minimi relativi di una funzione in un intervallo?

2. Una funzione derivabile in un punto è ivi continua? E viceversa? Una funzione derivabile da destra in un punto è ivi continua da destra? E viceversa?

3. Disegnare il grafico della derivata f' della funzione il cui grafico è riportato alla lavagna.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare la derivata di

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^4)\, dt\,.$$

.

---

2. Enunciare il criterio del rapporto per le serie, con un esempio significativo.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\operatorname{sen}|x|\,, \qquad |\operatorname{sen} x|\,, \qquad \operatorname{sen}|x+1|\,, \qquad \operatorname{sen}\frac{|x|}{3}\,,$$

---

4. Sia f una funzione derivabile due volte in $\mathbf{R}$, tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad f(1) = -1\,, \quad f(-1) = 1\,.$$

Dimostrare che
a) f si annulla in almeno tre punti;
b) la sua derivata seconda si annulla in almeno un punto.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di funzione inversa. Fare un esempio significativo.

2. Enunciare il teorema della derivata di funzione composta, con un esempio.

3. Disegnare il grafico della **derivata** f' della funzione f il cui grafico è disegnato alla lavagna.

4. Sia f una funzione derivabile due volte in $\mathbf{R}$, tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +5\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -5\,, \quad f(1) = -1\,, \quad f(-1) = 1\,.$$

Dimostrare che

a) f si annulla in almeno tre punti;

b) la sua derivata seconda si annulla in almeno un punto.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Maggioranti, minoranti, estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali.

2. Serie a termini di segno qualsiasi: criteri per la convergenza.

3. Che cos'è un flesso a tangente verticale di una funzione? Disegnare il grafico della derivata f' nell'intorno di un flesso a tangente verticale di f.

4. Applicando la **definizione** di integrale di Riemann, dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann in $[0, 2]$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di funzione suriettiva. Enunciare almeno un risultato significativo in proposito.

2. Principali proprietà del valore assoluto.

3. Calcolare l'area dell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq 4 - x^2\right\}$$

4. Dimostrare che, se f e g sono due funzioni reali aventi lo stesso dominio, allora si ha

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g\,,$$

e può effettivamente esserci una disuguaglianza stretta.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Definizione di punto di massimo relativo di una funzione. Enunciare almeno un risultato significativo in proposito.

---

2. Enunciare il teorema dei carabinieri (teorema del confronto) per successioni, e dare un esempio significativo di applicazione.

---

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\arccos x\,, \quad \arccos(-x)\,, \quad \arccos(x-2)\,, \quad \cos(\arccos x)\,.$$

---

4. Siano f e g sono due funzioni continue definite sullo stesso intervallo: la funzione $\min\{f(x), g(x)\}$ è continua? E se all'aggettivo "continua" sostituisco "derivabile"?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di funzione strettamente crescente. Enunciare almeno un risultato significativo in proposito.

2. Enunciare il teorema sulla derivata della funzione composta.

3. Senza fare calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\operatorname{arctg} x\,, \quad \operatorname{arctg}(-2x)\,, \quad \operatorname{arctg}(x-2)\,, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\,.$$

4. Siano f e g sono due funzioni continue definite sullo stesso intervallo: la funzione $\max\{f(x), g(x)\}$ è continua? E se all'aggettivo "continua" sostituisco "derivabile"?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di funzione strettamente decrescente. Enunciare almeno un risultato significativo in proposito.

2. Enunciare il teorema sulla continuità di una funzione composta.

3. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$x^{1/3}\,, \quad |x|^{1/3}\,, \quad (\operatorname{sen} x)^{1/3}\,, \quad \operatorname{sen}(x^{1/3})\,.$$

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Teorema della permanenza del segno e sue applicazioni.

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+5}{n^2+n}\,.$$

3. Trovare le radici terze di $-8i$ nel campo complesso.

4. Trovare una successione infinitesima di numeri positivi che non sia definitivamente decrescente.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare e, se c'e' tempo, dimostrare i legami tra la monotonia di una funzione e il segno della sua derivata.

---

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+n)\,(x-1)^n$$

al variare di $x \in \mathbf{R}$.

---

3. Descrivere il procedimento per la determinazione delle radici n-esime di un numero complesso.

---

4. Usando la definizione di limite, provare che

$$\lim_{x\to 2} \frac{1+x^2}{x-1} = 5\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare e, se c'è tempo, dimostrare il teorema di Lagrange.

---

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1+n}\,(x-2)^n$$

al variare di $x \in \mathbf{R}$.

---

3. Descrivere e giustificare il procedimento per calcolare la potenza n-esima di un numero complesso.

---

4. Usando la definizione di limite, provare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{1-x} = -\infty\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare e, se c'è tempo, dimostrare il teorema di Rolle.

2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+n}}{n+n^2}\,.$$

3. Descrivere e giustificare il procedimento per calcolare il reciproco di un numero complesso, sia in forma canonica che in forma trigonometrica.

4. Mostrare che

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1+x^2}{2-x} = -\infty\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare e, se c'è tempo, dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

2. Enunciare i principali criteri di convergenza per una serie a termini di segno qualsiasi.

3. Trovare tutte le soluzioni, nel campo complesso, dell'equazione

$$z^6 - 8 = 0\,.$$

4. Trovare una funzione derivabile in tutto $\mathbf{R}$, la cui derivata è discontinua in un punto.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivata del prodotto di funzioni.

---

2. Principali proprietà della serie geometrica.

---

3. Disegnare, nel campo complesso, **tutte** le potenze intere naturali di $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1-i)$.

---

4. Data una funzione derivabile due volte in $\mathbf{R}$ tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \quad f'(0) = -1\,,$$

dimostrare che esiste almeno un punto in cui f'' si annulla.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di estremo inferiore di un insieme di numeri reali.

2. Se una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge sia per $x = -2$ che per $x = 1$, cosa posso dire sull'insieme di convergenza?

3. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 di $f(x) = \operatorname{tg} x$ con punto iniziale $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. Scrivere una funzione di classe $C^1(\mathbf{R})$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, avente derivata prima non definitivamente limitata per $x \to +\infty$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di limite di una successione.

2. Se una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per ogni x intero, cosa posso dire sull'insieme di convergenza?

3. Trovare tutte le soluzioni complesse di $z^4 + 16 = 0$.

4. Dimostrare, applicando la definizione di limite, che una successione monotona decrescente ammette sempre limite.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Definizione di funzione continua, continua da destra/sinistra.

2. Criterio della convergenza assoluta per serie, con esempi.

3. Dire se la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$ è invertibile, e in tal caso dire dove è definita l'inversa.

4. Dimostrare che, dato un polinomio $P_n(z)$ a coefficienti reali, allora le sue radici sono reali oppure coppie complesse coniugate.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Calcolare, facendo il limite del rapporto incrementale, la derivate della funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ nel punto $x = 1$.

---

2. Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno, con esempi.

---

3. Dire se la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + x^3)$ è invertibile, e in tal caso dire dove è definita l'inversa.

---

4. Dimostrare che una funzione convessa nell'intervallo (a, b) verifica la seguente proprietà:

Per ogni coppia $x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$, in $(a, b) \setminus (x_1, x_2)$ il grafico di f giace non al di sotto della retta passante per $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Calcolare, facendo il limite del rapporto incrementale, la derivate della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ nel punto $x = 1$.

---

2. Criterio della convergenza assoluta per serie, con esempi.

---

3. Definizione di funzione strettamente crescente, e criteri per verificare la stretta crescenza.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Mostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = ??$

2. Una funzione continua in $[a,b]$ è limitata?

3. Definizione di integrale di Riemann di una funzione in un intervallo.

4. Dimostrare che se f e g sono due funzioni integrabili secondo Riemann in $[a,b]$, tali che $f \leq g$ in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Dire quanto vale $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^\alpha}{\sqrt{x}}$, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

2. Risolvere la disequazione $|x-1| > |x-3|$.

3. Cosa significa, per definizione, che la somma di una serie vale 5?

4. Dimostrare, usando la definizione di integrale di Riemann, che se f è una funzione integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, allora $-f$ è anch'essa integrabile, e $\displaystyle\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Fornire la definizione di derivata, e descrivere il suo significato geometrico.

2. Trovare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\ln(|x-4|)}$.

3. Fornire la definizione di serie convergente, ed enunciare il criterio del confronto per le serie.

4. Dimostrare, usando la definizione di integrale di Riemann, che se f è una funzione integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, allora $2f$ è anch'essa integrabile, e $\int_a^b (2f(x))\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Maggioranti, minoranti, estremi superiore e inferiore di un insieme di numeri reali.

---

2. Calcolare, usando la definizione di derivata, $f'(2)$, dove $f(x) = x^3$.

---

3. Enunciare il teorema di Fermat sui punti di estremo relativo di una funzione. Se c'è tempo, dimostrarlo.

---

4. Dimostrare, usando la definizione di limite, che se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 4$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \,.$$

ANALISI MATEMATICA I PROVA DI TEORIA (13/7/2012)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Com'è fatta l'immagine di una funzione continua su un intervallo?

---

2. Calcolare la derivata di

$$f(x) = \int_3^x 2^{1/t}\, dt\,.$$

---

3. Criterio di monotonia di una funzione: enunciarlo e, se c'è tempo, dimostrarlo.

---

4. Dimostrare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{5-x} = \frac{1}{2}\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Esiste sempre la primitiva di una funzione continua su un intervallo?

2. Illustrare il metodo di integrazione per sostituzione.

3. Enunciare il criterio di convessità di una funzione regolare.

4. Dimostrare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{5-x} = 1\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dire quando una serie si dice divergente.

---

2. Enunciare e dimostrare la regola della derivata del prodotto di funzioni.

---

3. Disegnare il grafico della funzione inversa (se esiste) della funzione $\operatorname{sen} x$ ristretta all'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

---

4. Dimostrare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+10}{6-x} = 3\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, si può dire qualcosa sulla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$?

---

2. Enunciare e dimostrare la regola per il calcolo della derivata di $\dfrac{1}{f(x)}$.

---

3. Trovare, se possibile, un esempio di una funzione continua ma non derivabile nel punto $x = 1$. Trovare, se possibile, un esempio di una funzione derivabile ma non continua nel punto $x = 1$.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si può dire sul resto?

2. Enunciare il teorema sui limiti di successioni monotòne.

3. Enunciare la definizione e le proprietà rilevanti del numero e.

4.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Trovare le radici seste di $-i$.

2. Enunciare, e se c'è tempo dimostrare, il teorema del confronto per serie.

3. Enunciare la definizione di derivata e illustrare il suo significato geometrico.

4. Utilizzando opportunamente il polinomio di Taylor, calcolare $\ln(\frac{3}{2})$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Mostrare che moltiplicare un numero complesso per i equivale, geometricamente, a ruotare intorno all'origine la sua rappresentazione sul piano cartesiano.

---

2. Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-2)^n$ converge per $x = 0$ e non converge per $x = 4$, cosa posso dire sul suo insieme di convergenza?

---

3. Usando la definizione di derivata, calcolare $f'(2)$ dove $f(x) = \sqrt{x+7}$.

---

4. Dimostrare che una funzione di classe $C^1(\mathbf{R})$, che ammetta due punti di massimo relativo, ha almeno un terzo punto critico.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Dato il numero complesso $z = 3 - 3i$, calcolare $|z|$, $\frac{1}{z}$, $\overline{z}$, z^8.

---

2. Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + n}$ converge, motivando la risposta.

---

3. Dare la definizione di funzione continua in un punto. Enunciare, e possibilmente dimostrare, un risultato significativo sulle funzioni continue.

---

4. Dimostrare che una funzione f di classe $C^2(\mathbf{R})$, che ammetta tre punti distinti in cui si annulla, ha almeno un punto in cui f'' si annulla.

ANALISI MATEMATICA I PROVA DI TEORIA (4/2/2013)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Cosa significa la frase

$$f(x) \text{ è definitivamente maggiore di 5 per } x \to 2^+ \text{ ?}$$

Fare un esempio di una funzione che verifica questa proprietà.

---

2. Enunciare il criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno, e fornirne un'applicazione significativa.

---

3. Enunciare **sinteticamente** la definizione di integrale di Riemann di una funzione su un intervallo.

---

4. Trovare una funzione derivabile due volte, ma non tre, nell'origine.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Cosa significa la frase

$f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ per $x \to 2^-$?

2. Enunciare il criterio della convergenza assoluta per le serie, e fornirne un'applicazione significativa.

3. Enunciare **sinteticamente** le differenze e gli eventuali legami tra i concetti di integrale definito e integrale indefinito di una funzione $f(x)$.

4. Mostrare che

$$e^{-x} \geq 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

ANALISI MATEMATICA I PROVA DI TEORIA (11/2/2013)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Cosa significa la frase

$f(x)$ è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 1^+$?

---

2. Enunciare il criterio del rapporto per le serie, e fornirne un'applicazione significativa.

---

3. Dimostrare che, per $n \in \mathbf{N}$, un numero complesso z ha esattamente ... radici n-esime complesse.

---

4. Utilizzando la formula di Taylor, dimostrare che, per una funzione di classe C^2,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0)\,.$$

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Cosa significa la frase

$$f(x) \text{ è un infinito di ordine 3 per } x \to +\infty \ ?$$

2. Enunciare la principale condizione necessaria per la convergenza delle serie, e fornirne un'applicazione significativa.

3. Dimostrare che la derivata dell'esponenziale a^x vale...

4. Calcolare la derivata 2013-esima di $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ nel punto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

ANALISI MATEMATICA I PROVA DI TEORIA (22/2/2013)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Enunciare il teorema di permanenza del segno, e se c'è tempo dimostrarlo.

2. Dimostrare, usando la teoria delle serie, che $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$.

3. Dimostrare, utilizzando la definizione, che la derivata della funzione $f(x) = \log_5 x$ vale ....

4. Dimostrare che l'integrale indefinito di una funzione dispari su $\mathbf{R}$ è costituito da funzioni pari.

ANALISI MATEMATICA I — PROVA DI TEORIA (27/2/2013)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Che tipo di discontinuità può avere una funzione monotona in un intervallo?

---

2. Dare la definizione di estremo superiore di un insieme di numeri reali. Determinare l'estremo superiore di $a_n = 2^{-1/n}$.

---

3. Disegnare il grafico di f', se f ha il seguente grafico:

---

4. Dimostrare che l'integrale indefinito di una funzione pari su $\mathbf{R}$ contiene una funzione dispari.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = |x|^\alpha$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

---

2. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, senza fare calcoli:

$$\operatorname{sen}(-x)\,, \qquad \operatorname{sen}(|x|)\,, \qquad \operatorname{sen}(|x-2|)\,, \qquad |\operatorname{sen}(x)|^{1/3}\,,$$

---

3. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 e punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\,.$$

---

4. Mostrare che una funzione convessa su $\mathbf{R}$ e infinitesima per $x \to +\infty$ è non negativa.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Principali proprietà delle serie a termini positivi.

2. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, senza fare calcoli:

$$\mathrm{tg}(-x)\,, \qquad |\,\mathrm{tg}(x)|\,, \qquad |\,\mathrm{tg}(x+3)|\,, \qquad (\mathrm{tg}(x))^{8/3}\,,$$

3. Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{t^4}\,dt\,.$$

4. Data una funzione convessa su $\mathbf{R}$ che tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$, quanti zeri presenta?

ANALISI MATEMATICA I PROVA DI TEORIA (21/6/2013)

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

---

1. Principali proprietà delle serie a termini positivi.

---

2. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, senza fare calcoli:

$$\operatorname{arctg}(-x)\,, \qquad |\operatorname{arctg}(x)|\,, \qquad |\operatorname{arctg}(x-3)|\,, \qquad (\operatorname{arctg}(x))^{2/3}\,.$$

---

3. Enunciare un teorema significativo sul polinomio di Taylor, con un'applicazione.

---

4. Data una funzione concava su $\mathbf{R}$ che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quanti zeri presenta?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Principali proprietà dell'integrale di Riemann.

2. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, senza fare calcoli:

$$\cos(1/x)\,, \qquad \cos|x|\,, \qquad \arccos|x|\,, \qquad \ln(\cos x)\,.$$

3. Enunciare un teorema significativo sulle funzioni continue, con un'applicazione.

4. Dimostrare che il limite della somma è la somma dei limiti.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Limiti di funzione monotòne.

2. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, senza fare calcoli:

$$e^{1/x}\,, \qquad e^{|x|}\,, \qquad \frac{1}{e^x}\,, \qquad |\ln(3x)|\,.$$

3. Enunciare e possibilmente dimostrare il teorema di Rolle.

4. Dimostrare che la composizione di funzioni continue è continua.

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Fornire la definizione di asintoto obliquo di una funzione.

2. Enunciare il teorema sul limite del prodotto di una funzione infinitesima per una limitata.

3. Trovare il polinomio di McLaurin di ordine 5 della funzione

$$f(x) = \operatorname{sen} x^3 - \ln(1 + x^2 + x^3)\,,$$

giustificando i passaggi.

4. Dimostrare che, se f e g sono due funzione derivabili, e sia $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. h è una funzione continua? E' derivabile?

ISTRUZIONI

Rispondere alle prime tre domande in modo chiaro e sintetico. Solo dopo aver risposto alle prime tre domande rispondere alla quarta. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di alcun testo o appunto.

1. Fornire la definizione di flesso di una funzione. Disegnare il tipico grafico della derivata prima in un intorno di un punto di flesso.

2. Enunciare il teorema dei carabinieri per i limiti di funzioni, con almeno un esempio di applicazione.

3. Definizione di funzione decrescente in un intervallo. Criteri differenziali per la decrescenza.

4. Usando la definizione di limite, dimostrare che, se $f(x) \geq 1$ definitivamente per $x \to x_0$, e se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.