Richiami di teoria della misura

In questo capitolo richiameremo le nozioni base di Teoria della Misura. In particolare, introdurremo le nozioni di misura boreliana, misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$, funzione misurabile, discuteremo la costruzione dell'integrale e ne studieremo le principali proprietà.

1. Misure astratte

Nel seguito, E è un insieme qualunque, e 2^E è l'insieme delle parti di E.

Definizione 1.1. Una *σ-algebra* su E è una famiglia $\mathcal{M} \subseteq 2^E$ tale che
- (i) $\emptyset, E \in \mathcal{M}$
- (ii) per ogni $F \in \mathcal{M}$ si ha $E \setminus F \in \mathcal{M}$
- (iii) per ogni successione $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}$ si ha $\cup_k E_k \in \mathcal{M}$.

Esercizio 1.2. Dimostrare che le σ–algebre sono stabili rispetto a intersezioni numerabili: per ogni successione $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}$ si ha $\cap_k E_k \in \mathcal{M}$.

Si noti che esistono sempre delle σ–algebre su E:
1. La più piccola σ–algebra, data da $\mathcal{M} = \{\emptyset, E\}$. Si chiama la σ–algebra *discreta*.
2. La più grande σ–algebra, che è ovviamente l'insieme delle parti 2^E. Si chiama la σ–algebra *indiscreta*.

Ma è facile generarne altre:

Proposizione 1.3 (σ–algebra generata). *Se $\mathcal{C}$ è una qualunque collezione di sottoinsiemi di E, l'intersezione di tutte le σ–algebre su E che contengono $\mathcal{C}$ è una σ–algebra, detta la σ–*algebra generata da $\mathcal{C}$.

Definizione 1.4 (Misura). Una *misura (positiva)* su E è una coppia $(\mathcal{A}, \mu)$ dove $\mathcal{A}$ è una σ–algebra su E, e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una mappa tale che:
- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) μ è *σ–additiva*, ossia per ogni successione $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$ si ha $\mu(\cup_k E_k) = \sum_k \mu(E_k)$.

La σ–algebra $\mathcal{A}$ si chiama il *dominio* di μ e si indica anche con $D(\mu)$.

Esercizio 1.5. Una definizione equivalente si ottiene sostituendo a (i) la proprietà: esiste un insieme F tale che $m(F) < \infty$.

Un po' di terminologia. Sia μ una misura su E con dominio $D(\mu)$, allora
- la coppia (E, μ) si chiama uno *spazio misurato*;
- gli insiemi di $D(\mu)$ si chiamano *μ–misurabili*, o semplicemente *misurabili*;
- gli insiemi di misura nulla e tutti i loro sottoinsiemi si chiamano insiemi *μ–nulli* o semplicemente *nulli*;
- μ si dice *completa* se tutti gli insiemi nulli sono misurabili;
- μ si dice *finita* se la sua immagine è limitata;
- μ si dice *σ–finita* se E si può scrivere come unione di una successione di insiemi misurabili di misura finita;

- μ si dice una *misura di probabilità* se $\mu(E) = 1$;
- se una proprietà dipende da $x \in E$, si dice che essa vale *quasi ovunque (q.o.)*, o per *quasi ogni* $x \in E$, se l'insieme degli x per cui la proprietà è falsa è nullo.

PROPOSIZIONE 1.6 (Monotonia). *Sia μ una misura su E e sia $E_1, E_2, \dots$ una successione di insiemi misurabili.*

(i) Se $E_k \subseteq E_{k+1}$ per ogni k allora $\mu(E_k) \uparrow \mu(\cup_k E_k)$.
(ii) Se $E_k \supseteq E_{k+1}$ per ogni k e $\mu(E_1) < \infty$ allora $\mu(E_k) \downarrow \mu(\cap_k E_k)$.

2. Costruzione di misure

Fabbrichiamo la tecnologia necessaria per costruire misure. Procediamo per gradi:

DEFINIZIONE 2.1 (Misura esterna). Una *misura esterna* su E è una mappa $m : 2^E \to [0, +\infty]$ tale che

(i) $m(\emptyset) = 0$;
(ii) m è σ*–subadditiva*, cioè: per ogni successione $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di E (finita o infinita) e per ogni $A \subseteq \cup E_k$ si ha $m(A) \le \sum m(E_k)$.

OSSERVAZIONE 2.2. Dalla proprietà (ii) segue la monotonia della misura esterna; ossia, se $A \subseteq B$ si ha $m(A) \le m(B)$.

È molto facile costruire misure esterne: infatti, se prendiamo una famiglia qualunque di insiemi $\mathcal{S} \subseteq 2^E$ e assegnamo in maniera (arbitraria) il loro volume m, il seguente risultato genera subito una misura esterna m^* associata a m.

TEOREMA 2.3 (Carathéodory). *Sia $\mathcal{S}$ una collezione di sottoinsiemi di E contenente $\emptyset$, e sia $m : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una mappa tale che $m(\emptyset) = 0$. Allora la mappa $m^* : 2^E \to [0, +\infty]$ definita come segue (con la convenzione $\inf \emptyset = +\infty$)*

$$m^*(F) = \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} m(E_j) : (E_j)_{j\in\mathbb{N}} \textit{ successione di } \mathcal{S} \textit{ tale che } \ F \subseteq \cup E_j \right\} \tag{2.1}$$

è una misura esterna su E.

Questo procedimento permette di assegnare una misura a *qualunque* sottoinsieme di E, ma questa in genere non gode della proprietà fondamentale 'il tutto è uguale alla somma delle parti' che ci aspettiamo da una misura. Una soluzione del problema è dovuta ancora a Carathéodory:

TEOREMA 2.4 (Carathéodory). *Sia m una misura esterna su E, e sia $\mathcal{M}(m)$ la famiglia di tutti gli insiemi $F \subseteq E$ con la proprietà*

$$m(A) = m(A \cap F) + m(A \setminus F) \qquad \textit{per tutti gli } A \subseteq E.$$

Allora $\mathcal{M}(m)$ è una σ–algebra, e la restrizione di m ad $\mathcal{M}(m)$ è una misura completa.

Riassumendo: se abbiamo una mappa $m : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definita su una famiglia di sottoinsiemi di E (contenente almeno l'insieme vuoto), possiamo definire una misura esterna $m^* : 2^E \to [0, +\infty]$ con il Teorema 2.3, e poi possiamo restringere m^* a $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m^*)$ ottenendo in questo modo una misura completa $\mu = m^*|_{\mathcal{M}}$. Non abbiamo ancora risolto tutti i problemi perché la misura μ che si ottiene in questo modo potrebbe *non essere un'estensione* della mappa di partenza m. Questo vuol dire che possono succedere due cose:

(1) può succedere che qualche insieme $F \in \mathcal{S}$ non sia misurabile (cioè $F \notin \mathcal{M}$);
(2) può succedere che per qualche $F \in \mathcal{S}$ si abbia $\mu(F) = m^*(F) < m(F)$.

Per chiarire la situazione serve un'ultima definizione:

Definizione 2.5. Un *semianello* su E è una famiglia non vuota $\mathcal{S} \subseteq 2^E$ tale che

(i) per ogni $A, B \in \mathcal{S}$ l'intersezione $A \cap B$ appartiene a $\mathcal{S}$;

(ii) per ogni $A, B \in \mathcal{S}$ la differenza $A \setminus B$ si può scrivere come unione di un numero finito di insiemi disgiunti di $\mathcal{S}$.

Una mappa $m : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ si dice una *misura* su $\mathcal{S}$ se $m(\emptyset) = 0$ e se è σ–additiva (cioè se $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{S}$ sono disgiunti e $F = \cup F_j \in \mathcal{S}$ allora $m(F) = \sum m(F_j)$).

Si noti che dalla definizione di semianello segue che l'insieme vuoto deve necessariamente appartenervi.

Esercizio 2.6. Dimostrare la precedente affermazione.

La precedente definizione è soltanto una versione astratta delle proprietà dei rettangoli semiaperti di $\mathbb{R}^n$: l'intersezione di due rettangoli è sempre un rettangolo, mentre la differenza di due rettangoli non è sempre un rettangolo ma si può spezzare in un numero finito di rettangoli disgiunti.

Teorema 2.7 (Fréchet). *Sia $\mathcal{S} \subseteq 2^E$ un semianello e m una misura su $\mathcal{S}$. Allora la misura $\mu = m^*|_{\mathcal{M}(m^*)}$ ottenuta applicando prima il Teorema 2.3 e poi il Teorema 2.4 estende m, ossia tutti gli $F \in \mathcal{S}$ sono misurabili e $\mu(F) = m(F)$.*

Esercizio 2.8. Se una mappa m sul semianello $\mathcal{S}$ è finitamente additiva e σ–subadditiva allora essa è anche σ–additiva.

3. Misura e topologia

Consideriamo ora il caso particolarmente importante in cuì l'insieme E è dotato contemporaneamente di una misura μ e una topologia τ. Anzitutto si definisce la *σ–algebra di Borel* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ come la σ–algebra generata dalla famiglia τ di tutti gli aperti; gli elementi di $\mathcal{B}$ si chiamano gli insiemi *boreliani.* Dalle proprietà di una σ–algebra vediamo che $\mathcal{B}$ contiene tutti i chiusi, le intersezioni numerabili di aperti, le unioni numerabili di chiusi, eccetera.

Esercizio 3.1. Dimostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ coincide con le σ–algebre generate da:

(1) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $(a, +\infty)$;
(2) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $[a, +\infty)$;
(3) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $(-\infty, a)$;
(4) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $(-\infty, a]$.

Osservazione 3.2 (Definizione e proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$). Ricordiamo che $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, dove $+\infty$ e $-\infty$ sono due nuovi elementi. La relazione di ordine si estende nel modo ovvio ($-\infty < a < +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$). Muniamo $\overline{\mathbb{R}}$ della topologia formata da tutti gli aperti A di $\mathbb{R}$ più gli insiemi del tipo $[-\infty, a) \cup A$ e $(a, +\infty] \cup A$ e $[-\infty, a) \cup A \cup (b, +\infty]$ per qualunque $a, b \in \mathbb{R}$. Su $\overline{\mathbb{R}}$ si possono estendere le operazioni fra numeri reali nel modo ovvio, ma con qualche esclusione: le operazioni $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$ non sono definite. Per la teoria della misura adotteremo comunque la convenzione $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Esercizio 3.3. $\overline{\mathbb{R}}$ è compatto?

Esercizio 3.4. Dimostrare che $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ coincide con le σ–algebre generate da:

(1) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $(a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$;
(2) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $[a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$;
(3) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $[-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$;
(4) tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $[-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Le misure che ci interessano sono quelle che dialogano con la topologia, ossia tali che gli aperti sono misurabili. Se gli aperti sono misurabili ovviamente anche tutti i boreliani sono misurabili. Diremo che

(1) μ è una *misura topologica* se $\mathcal{B} \subseteq D(\mu)$;
(2) μ è una *misura boreliana* se $\mathcal{B} = D(\mu)$.

(In realtà le due definizioni sono praticamente interscambiabili: infatti ogni misura boreliana è ovviamente topologica, e se restringiamo una misura topologica ai boreliani otteniamo una misura boreliana).

Se l'insieme è uno spazio metrico, un risultato di Carathéodory consente di costruire misure boreliane in modo efficace. Ricordiamo che se X è uno spazio metrico con distanza d, la distanza di due insiemi $A, B \subseteq X$ si definisce come

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Teorema 3.5 (Carathéodory). *Sia m una misura esterna su uno spazio metrico (X, d). Supponiamo che per tutti gli insiemi $A, B \subseteq X$ tali che $d(A, B) > 0$ valga*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Allora tutti i boreliani di X appartengono a $\mathcal{M}(m)$, e quindi m ristretta a $\mathcal{B}$ è una misura boreliana.

Nel caso $E = \mathbb{R}^n$ supporremo sempre che la topologia sia quella euclidea. La misura topologica più importante su $\mathbb{R}^n$ è la misura di Lebesgue (vedi Esempio 4.3), ma non è certo l'unica.

Definizione 3.6 (Misure di Radon su $\mathbb{R}^n$). Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una misura topologica su Ω si dice *misura di Radon* se è *localmente finita*, cioè se tutti i compatti hanno misura finita.

La definizione precedente si può estendere a spazi topologici più generali, ma è necessario richiedere proprietà aggiuntive di regolarità della misura, che sono automaticamente verificate su $\mathbb{R}^n$.

4. Esempi di misure

Passiamo in rassegna alcuni esempi importanti di misure.

Esempio 4.1 (Misura che conta). La *misura che conta* su un insieme E è definita sulla σ–algebra 2^E delle parti di E come segue:

$$\sharp(F) = +\infty \text{ se } F \text{ è infinito}, \qquad \sharp(F) = \text{ il numero di elementi di } F \text{ se è finito.}$$

In altri termini, $\sharp(F)$ è semplicemente la cardinalità dell'insieme F.

Esempio 4.2 (Misura di Dirac). Se E è un insieme e $x \in E$, la *misura di Dirac in x* è definita sulla σ–algebra 2^E delle parti di E come segue:

$$\delta_x(F) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F, \\ 0 & \text{se } x \notin F. \end{cases}$$

Se E è uno spazio topologico allora δ_x è una misura topologica, e più precisamente di Radon.

Esempio 4.3 (Misura di Lebesgue). Riassumiamo ora la costruzione della misura di Lebesgue λ_n su $\mathbb{R}^n$, che serve da modello per tutta la teoria della misura. Partiamo dal semianello $\mathcal{I}$ di tutti i rettangoli semiaperti $I = \Pi_{j=1}^n [a_j, b_j)$ di $\mathbb{R}^n$, $a_j \leq b_j$, su cui è definita la mappa volume

$$Vol(I) = \Pi_{j=1}^n |b_j - a_j|.$$

Si verifica senza difficoltà che Vol è finitamente additiva e σ–subadditiva su $\mathcal{I}$, quindi è una misura su $\mathcal{I}$. Allora,

- dai Teoremi 2.3 e 2.7 segue che è definita sulle parti di $\mathbb{R}^n$ una misura esterna che estende Vol; essa si chiama la *misura esterna di Lebesgue* e si indica con λ^*.
- dal Teorema 2.7 segue inoltre che restringendo λ^* agli insiemi misurabili si ottiene una misura completa su $\mathbb{R}^n$ che estende Vol. Essa si chiama la *misura di Lebesgue* e si indica con λ^n o semplicemente λ, mentre indichiamo con $\mathcal{L}^n$ (o $\mathcal{L}$) la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Chiaramente λ è una misura topologica. Infatti, dato che i rettangoli di $\mathcal{I}$ sono misurabili, anche tutti gli aperti lo sono, in quanto ogni aperto si può scrivere come unione di una successione di rettangoli semiaperti. La restrizione $\lambda|_{\mathcal{B}}$ di λ ai boreliani naturalmente è una misura boreliana; spesso non si fa differenza fra le due e si usa la notazione λ anche per indicare $\lambda|_{\mathcal{B}}$.

Inoltre, dato che ogni compatto si può inscrivere in un rettangolo di volume finito, vediamo subito che λ è anche una misura di Radon.

Altre proprietà importanti:

(1) La misura di Lebesgue è *regolare*. Questo vuol dire due cose: se E è misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste un aperto A tale che $E \subseteq A$ e $\lambda(A \setminus E) < \varepsilon$; inoltre, se E è misurabile di misura finita e $\varepsilon > 0$, esiste un compatto K tale che $K \subseteq E$ e $\lambda(E \setminus K) < \varepsilon$. In altri termini, gli insiemi misurabili si possono approssimare con insiemi aperti (da fuori) e con insiemi compatti (da dentro, se hanno misura finita).

(2) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare e $A \in \mathcal{L}$, allora $T(A) \in \mathcal{L}$ e $\lambda(T(A)) = |\det T|\lambda(A)$.

(3) In particolare, λ è invariante per rotazioni.

(4) λ è invariante per traslazioni, ossia: se $v \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathcal{L}$ allora $v + A \in \mathcal{L}$ e $\lambda(v + A) = \lambda(A)$.

L'invarianza per traslazioni *caratterizza* la misura di Lebesgue, a meno di costanti: ossia, se μ è una misura boreliana invariante per traslazioni e chiamiamo c la misura del cubo unitario, allora $\mu(B) = c\lambda(B)$ per tutti i boreliani B.

Esercizio 4.4. Dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora esiste un boreliano B tale che $\lambda(E \setminus B) = \lambda(B \setminus E) = 0$. Dedurne che un insieme è misurabile secondo Lebesgue se e solo se è unione di un boreliano con un insieme nullo.

Le misure topologiche su $\mathbb{R}^n$ che verificano la proprietà dell'esercizio precedente si dicono *Borel regolari*.

5. Funzioni misurabili

La definizione che segue è ispirata a quella di funzione continua in topologia:

Definizione 5.1. Siano E, F insiemi qualunque, $\mathcal{A}$ una σ–algebra in E e $\mathcal{B}$ una σ–algebra in F. Una funzione $u : E \to F$ si dice *misurabile* quando $u^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.

In genere non è necessario testare la condizione $u^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ su *tutti* gli insiemi della σ–algebra $\mathcal{B}$ ma basta verificarla su una famiglia di generatori:

Esercizio 5.2. Siano $E, \mathcal{A}, F, \mathcal{B}$ come nella Definizione. Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia la σ–algebra generata da una collezione di insiemi $\mathcal{C}$. Allora u è misurabile se e solo se $u^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ per ogni $C \in \mathcal{C}$.

Nel seguito considereremo sempre funzioni definite su uno spazio (E, μ) a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^n$; in questi casi sullo spazio d'arrivo considereremo sempre la σ–algebra dei boreliani, e in questo caso la definizione di misurabilità si può riformulare in un modo più pratico.

Ad esempio, se $\mathcal{B}$ è $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, la σ–algebra dei boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$, per verificare che la funzione u è misurabile è sufficiente verificare che per ogni aperto A di $\overline{\mathbb{R}}$ si abbia $u^{-1}(A) \in \mathcal{A}$; oppure, più semplicemente, che gli *insiemi di livello*

$$u^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in E \colon u(x) > a\}$$

appartengono ad $\mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, dato che gli intervalli del tipo $(a,+\infty]$ generano $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Possiamo quindi riformulare la Definizione 5.1 come segue

Definizione 5.3. Sia μ una misura sull'insieme E. Una funzione $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice *μ–misurabile*, o semplicemente *misurabile* se $\{x \in E \colon u(x) > a\} \in D(\mu)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Una funzione $u : E \to \mathbb{C}$ si dice *misurabile* se $u^{-1}(A) \in D(\mu)$ per ogni A aperto di $\mathbb{C}$.

Una funzione $u : E \to \mathbb{R}^n$ si dice *misurabile* se $u^{-1}(A) \in D(\mu)$ per ogni A aperto di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 5.4. *Sia μ una misura sull'insieme E.*

(i) *$u : E \to \mathbb{C}$ è misurabile se e solo se $\Re u$ e $\Im u$ sono misurabili.*
(ii) *Se $u, v : E \to \mathbb{C}$ sono misurabili e $z \in \mathbb{C}$ allora $|u|$, $\operatorname{sgn} u$, $\Re u$, $\Im u$, $zu + v$, $u \cdot v$ e u/v (se v non si annulla) sono misurabili.*
(iii) *Se $u, v, u_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili, $k \in \mathbb{N}$, allora u^+, u^-, $u \vee v$, $u \wedge v$, $\inf_k u_k$, $\sup_k u_k$, $\liminf_k u_k$ e $\limsup_k u_k$ sono misurabili.*
(iv) *Se u, $u_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ sono misurabili e u_k converge puntualmente a u, allora u è misurabile.*
(v) *Se $u : E \to \mathbb{C}$ è misurabile e $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è continua allora $\phi \circ u$ è misurabile.*
(vi) *Se E è uno spazio topologico e μ è una misura topologica, allora ogni funzione continua da E in $\mathbb{C}$ è misurabile.*

Osservazione 5.5. Se $u.v : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili, diciamo che la somma $u+v$ *è definita* quando l'insieme degli $x \in E$ nei quali si ha $u(x) = +\infty$ e $v(x) = -\infty$ o viceversa ha misura nulla; in questi punti in cui la somma non è definita poniamo $u + v = 0$. Allora $u + v$ risulta una funzione misurabile.

Un discorso simile vale per la differenza $u - v$. Invece il prodotto uv di due funzioni misurabili e zu di una funzione misurabile per un numero complesso z sono sempre definiti e misurabili, grazie alla convenzione $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Rivediamo la terminologia di uso corrente per funzioni definite su un insieme E dotato di una misura μ a valori in $\mathbb{C}$ o in $\overline{\mathbb{R}}$:

(1) u è *nulla q.o.* se l'insieme degli $x \in E$ in cui $u(x) \neq 0$ è nullo.
(2) u, v sono *uguali q.o.* se l'insieme degli $x \in E$ in cui $u(x) \neq v(x)$ è nullo.
(3) Una successione u_k *converge q.o.* ad u se l'insieme degli $x \in E$ in cui $u_k(x) \not\to u(x)$ è nullo.

Si noti il risultato seguente in cui è necessario supporre che la misura sia *completa*:

Proposizione 5.6. *Siano u, v due funzioni definite su E a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ o in $\mathbb{C}$, e sia μ una misura completa su E. Se u è misurabile e $v = u$ q.o., allora anche v è misurabile.*

Esercizio 5.7. Dimostrare che se μ è una misura completa su E e $u_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili con u_k convergente q.o. ad $u : E \to \mathbb{C}$, allora u è misurabile.

6. Integrazione

Fissiamo una misura μ su un insieme E.

DEFINIZIONE 6.1. Una *funzione semplice* $\phi : E \to \mathbb{C}$ è una funzione misurabile che assume un numero finito di valori.

Se chiamiamo $c_1, \ldots, c_N$ i valori non nulli di ϕ, e E_k l'insieme degli x in cui ϕ vale c_k, vediamo che si ha

$$\phi = \sum_{j=k}^{N} c_k \mathbf{1}_{E_k}$$

e gli insiemi E_k sono misurabili e disgiunti; chiameremo questa la *rappresentazione standard* della funzione semplice. Quando tutti gli E_k hanno misura finita, diciamo che ϕ ha *supporto finito*.

DEFINIZIONE 6.2. Sia ϕ una funzione semplice che assume solo valori reali non negativi e $\phi = \sum_{j=k}^{N} c_k \mathbf{1}_{E_k}$ la sua rappresentazione standard. L'*integrale* di ϕ è il numero (ricordare che $0 \cdot \infty = 0$)

$$\int \phi d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_j \mu(E_k).$$

Si noti che $\int \phi d\mu$ è un numero di $[0, +\infty]$, e in particolare può valere $+\infty$.

DEFINIZIONE 6.3. Sia $u : E \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile non negativa. L'*integrale* di u è il numero

$$\int u d\mu = \sup \left\{ \int \phi d\mu \colon \phi \text{ funzione semplice su } E \text{ tale che } 0 \leq \phi \leq u \text{ q.o.} \right\}.$$

Anche l'integrale di una funzione non negativa può essere un qualunque numero fra 0 e $+\infty$, compreso $+\infty$.

Se $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile qualunque, possiamo scriverla come differenza di due funzioni non negative; infatti $u = u^+ - u^-$, dove $u^+ = \max\{u, 0\}$ è la parte positiva di u e $u^- = \max\{-u, 0\}$ è la sua parte negativa. La definizione precedente permette di calcolare i due numeri $\int u^+ d\mu$ e $\int u^- d\mu$, ma per poter definire $\int u d\mu = \int u^+ d\mu - \int u^- d\mu$ bisogna escludere il caso in cui entrambi i numeri sono $+\infty$.

DEFINIZIONE 6.4. Sia $u : E \to [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile. Se almeno uno dei due numeri $\int u^+ d\mu$ e $\int u^- d\mu$ è finito, si dice che *l'integrale di u è definito* e si pone $\int u d\mu = \int u^+ d\mu - \int u^- d\mu$. Se entrambi i numeri sono finiti, si dice che u è *integrabile*.

Una funzione misurabile $u : E \to \mathbb{C}$ si dice *integrabile* se lo sono $\Re u$ e $\Im u$, e in questo caso si pone $\int u d\mu = \int \Re u d\mu + i \int \Im u d\mu$.

Quindi se una funzione misurabile a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ è integrabile, il suo integrale è un numero finito (reale o complesso).

DEFINIZIONE 6.5. Sia u una funzione misurabile su E a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$, e $A \subseteq E$ un insieme misurabile. L'integrale della funzione $u \cdot \mathbf{1}_A$ (quando è definito) si indica con $\int_A u d\mu$; quando è finito, la funzione u si dice *integrabile su A*.

PROPOSIZIONE 6.6 (Proprietà elementari dell'integrale). *Siano $u, v : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $w : E \to \mathbb{C}$ funzioni misurabili.*

- *(i) Se $u \geq 0$ q.o., allora $\int u d\mu = 0$ se e solo se $u = 0$ q.o.*
- *(ii) Se u è integrabile allora u è finita q.o.*
- *(iii) Se l'integrale di u è definito e $v = u$ q.o., allora $\int v d\mu = \int u d\mu$.*
- *(iv) Se u, v sono integrabili e $u \leq v$ q.o., allora $\int u d\mu \leq \int v d\mu$.*
- *(v) Lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale, e $\int$ è un funzionale lineare su di esso (a valori in $\mathbb{C}$).*

(vi) *w è integrabile se e solo se $|w|$ è integrabile, e in tal caso* $|\int w d\mu| \leq \int |w| d\mu$.

Le seguenti proprietà sono di fondamentale importanza e sono alla base di tutte le applicazioni della teoria dell'integrazione:

TEOREMA 6.7. *Siano u, v, u_k funzioni misurabili su E, per $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *(Beppo Levi, o convergenza monotona) Se $u_k : E \to [0, +\infty]$ e $u_k \leq u_{k+1}$ q.o. per ogni k, allora si ha $\int u_k d\mu \uparrow \int \sup u_k d\mu$.*

(ii) *(Lemma di Fatou) Se $u_k : E \to [0, \infty]$ per ogni k, allora si ha $\int (\liminf_k u_k) d\mu \leq \liminf_k \int u_k d\mu$.*

(iii) *(Lebesgue, o convergenza dominata) Supponiamo che $u_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$, e $v : E \to [0, +\infty]$. Se $u_k \to u$ q.o., $|u_k| \leq v$ q.o., e v è integrabile, allora si ha $\int u_k d\mu \to \int u d\mu$.*

ESERCIZIO 6.8 (Beppo Levi rivisitato). Se $u_k : E \to [0, +\infty]$, $u_k \leq u$ q.o. per ogni k e $u_k \to u$ q.o., allora $\int u_k d\mu \to \int \sup u_k d\mu$.

7. Misure reali e complesse

La definizione di misura si estende al caso di misure a valori reali o addirittura complessi. Bisogna solo fare attenzione agli infiniti: se fosse $\mu(A) = +\infty$ e $\mu(B) = -\infty$ per due insiemi misurabili disgiunti A e B, la formula $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ non avrebbe senso. Come al solito, E è un insieme qualunque. La definizione è esattamente la stessa che per misure positive, con una precisazione:

DEFINIZIONE 7.1 (Misure reali e complesse). Una *misura complessa* su E è una coppia $(\mathcal{A}, \mu)$ dove $\mathcal{A}$ è una σ–algebra su E, e $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ una mappa tale che:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) μ è *σ–additiva*, ossia per ogni successione $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$, la serie $\sum_k \mu(E_k)$ converge assolutamente e si ha $\mu(\cup_k E_k) = \sum_k \mu(E_k)$.

La σ–algebra $\mathcal{A}$ si chiama il *dominio* di μ e si indica anche con $D(\mu)$.

Una *misura reale* è una misura complessa che assume solo valori reali.

La definizione di funzione misurabile è identica al caso di misure positive (ad esempio, $u : E \to \mathbb{C}$ è misurabile se $u^{-1}(A) \in D(\mu)$ per ogni A aperto di $\mathbb{C}$).

Notiamo alcuni fatti elementari:

(1) se μ, ν sono misure complesse con lo stesso dominio e $z \in \mathbb{C}$, allora $z\mu + \nu$ (definita nel modo ovvio) è una misura complessa;

(2) l'insieme di tutte misure complesse definite sullo stesso dominio $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale complesso. Si indica con $ca(\mathcal{A})$;

(3) se μ è una misura complessa allora $\Re\mu$ e $\Im\mu$ sono misure reali.

DEFINIZIONE 7.2 (Variazione totale). Sia μ una misura reale o complessa su E. La *(misura) variazione totale* di μ è la mappa $|\mu| : D(\mu) \to [0, +\infty]$ definita come

$$|\mu|(F) := \sup \left\{ \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(F_k)| \colon F_k \in D(\mu),\ F = \cup_k F_k,\ F_k \text{ disgiunti} \right\}.$$

Il numero $\|\mu\|_M := |\mu|(E)$ è detto *variazione totale di μ.*

TEOREMA 7.3. *Per ogni misura complessa μ, la mappa $|\mu|$ è una misura positiva finita, e si ha $\|\mu\|_M < \infty$. Inoltre, $\|\cdot\|_M$ è una norma sullo spazio vettoriale complesso $ca(\mathcal{A})$ di tutte le misure complesse definite sulla σ–algebra $\mathcal{A}$, e lo rende uno spazio di Banach.*

Dalla definizione si ha subito che

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A),$$

quindi tutte le misure reali e complesse sono misure *finite*. Se poi μ è una misura reale, vediamo che

$$\mu^+ := \tfrac{1}{2}(|\mu| + \mu), \qquad \mu^- := \tfrac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

sono due misure positive finite, e vale la *decomposizione di Jordan*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Notare che analogamente qualunque misura complessa ν si scrive come combinazione di quattro misure positive finite:

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4,$$

dove

$$\nu_1 = (\Re\nu)^+, \quad \nu_2 = (\Re\nu)^-, \quad \nu_3 = (\Im\nu)^+, \quad \nu_4 = (\Im\nu)^-.$$

Questo permette di definire facilmente l'integrale: se μ è una misura reale e $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ una funzione misurabile, diciamo che essa è *integrabile* se è integrabile per μ^+ e per μ^- e gli integrali $\int ud\mu^\pm$ sono finiti, e in questo caso si pone

$$\int ud\mu = \int ud\mu^+ - \int ud\mu^-.$$

La definizione è analoga nel caso di una misura complessa, e si pone

$$\int ud\nu = \int ud(\Re\nu)^+ - \int ud(\Re\nu)^- + i\int ud(\Im\nu)^+ - i\int ud(\Im\nu)^-.$$

8. Teorema di Lebesgue–Radon–Nikodym

Definizione 8.1 (Assoluta continuità di misure). Siano μ, ν misure positive su E con lo stesso dominio.

Diciamo che ν è *assolutamente continua rispetto a* μ, in formule $\nu \ll \mu$, se ogni insieme nullo per μ è nullo anche per ν.

Diciamo che μ e ν sono *singolari* (l'una rispetto all'altra), in formule $\mu \perp \nu$, se possiamo scrivere $E = A \cup B$ con A, B misurabili disgiunti tali che $\mu(F)$=0 per ogni $F \subseteq B$ misurabile e $\nu(F) = 0$ per ogni $F \subseteq A$ misurabile.

Teorema 8.2 (Lebesgue–Radon–Nikodym). *Siano μ, ν due misure positive σ–finite su E, con lo stesso dominio $D = D(\mu) = D(\nu)$. Allora vale quanto segue.*

(i) (Lebesgue) Esiste un'unica decomposizione $\nu = \nu_a + \nu_s$ nella somma di due misure con dominio D, tali che $\nu_a \ll \mu$ e $\nu_s \perp \mu$.

(ii) (Radon–Nikodym) Esiste una funzione misurabile $u : E \to [0, +\infty]$, unica q.o. per μ, tale che

$$\nu_a(F) = \textstyle\int_F ud\mu \quad \textit{per ogni } F \in D(\mu).$$

La funzione u è integrabile se e solo se ν_a è finita.

Le misure ν_a e ν_s si chiamano rispettivamente la parte *regolare* e *singolare* di ν rispetto a μ. La parte regolare di solito si indica anche con

$$\nu_a = \frac{d\nu}{d\mu}$$

e si chiama la *derivata di Radon–Nikodym* di ν rispetto a μ.