La trasformata di Fourier

1. Definizione

Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, la sua *trasformata di Fourier* è definita come

$$\mathcal{F}u(\xi) = \widehat{u}(\xi) := \int u(x)e^{-ix \cdot \xi} dx \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Si noti che se $u = v$ q.o., questa formula dà $\widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi)$ in ogni ξ , quindi definisce un'unica funzione $\widehat{u}$ per tutti gli elementi della classe di equivalenza $[u]$. Quando si dice ad esempio che $\widehat{u}(\xi)$ è continua, si sta facendo riferimento a questa funzione univocamente determinata.

Anche l'operatore lineare $\mathcal{F} : u \mapsto \widehat{u}$ si chiama *trasformata di Fourier*. La *trasformata di Fourier coniugata* $\overline{\mathcal{F}}$ è definita come

$$\overline{\mathcal{F}}u(\xi) := \int u(x)e^{ix \cdot \xi} dx. \quad (1.2)$$

Chiaramente le proprietà di $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ sono sostanzialmente le stesse. Il primo risultato è elementare ma fondamentale:

PROPOSIZIONE 1.1. *Se $u \in L^1$, la funzione $\widehat{u}(\xi)$ definita in ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ da (1.1) è continua e $\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$.*

DIMOSTRAZIONE. La stima $\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$ segue da $|e^{-ix \cdot \xi}| = 1$; la proprietà di continuità si dimostra come segue: presa una successione convergente $\xi_j \rightarrow \xi$ in $\mathbb{R}^n$, osserviamo che $e^{-ix \cdot \xi_j} u(x) \rightarrow e^{-ix \cdot \xi} u(x)$ per q.o. x , e inoltre $|e^{-ix \cdot \xi_j} u(x)| \leq |u(x)| \in L^1$. Quindi $\widehat{u}(\xi_j) \rightarrow \widehat{u}(\xi)$ per il Teorema della convergenza dominata. $\square$

Quindi la Proposizione 1.1 stabilisce che

$$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{F}} : L^1 \rightarrow L^\infty$$

sono operatori limitati con norma minore o uguale a 1, e la loro immagine è contenuta in $L^\infty \cap C^0$. In seguito dimostreremo risultati più precisi.

Studiamo in dettaglio la relazione fra trasformata di Fourier e le principali simmetrie degli spazi di funzioni su $\mathbb{R}^n$. Le seguenti proprietà si dimostrano facilmente e sono lasciate per esercizio. Supponiamo sempre $u \in L^1$.

(1) **RIFLESSIONE** $Ru(x) = u(-x)$. $\mathcal{F}$ commuta con R : si ha $\widehat{Ru} = R\widehat{u}$, infatti

$$\mathcal{F}R = R\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}. \quad (1.3)$$

Pertanto, u è una funzione pari (ossia $Ru = u$) se e solo se $\widehat{u}$ è pari, e u è dispari ($Ru = -u$) se e solo se $\widehat{u}$ è dispari. Notiamo anche che u è pari se e solo se $\mathcal{F}u = \overline{\mathcal{F}}u$. Il “se” di tali (e delle seguenti) affermazioni segue facilmente una volta stabilita l'iniettività di $\mathcal{F}$.

(2) **CONIUGIO** $Ku(x) = \overline{u(x)}$. Valgono le regole

$$K\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}K = R\mathcal{F}K, \quad \mathcal{F}K = K\overline{\mathcal{F}} = KR\mathcal{F}. \quad (1.4)$$

Pertanto u è a valori reali ($Ku = u$) se e solo se $\widehat{u}(-\xi) = \overline{\widehat{u}(\xi)}$.

(3) **TRASFORMAZIONE LINEARE** $u \circ A(x) = u(Ax)$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier dà una nuova trasformazione lineare, infatti si ha

$$\widehat{u \circ A} = |\det A|^{-1} \widehat{u} \circ (A^{-1})^T. \quad (1.5)$$

- (4) **ROTAZIONE** $u \circ A(x) = u(Ax)$, $A \in O_n(\mathbb{R})$. È un caso speciale della regola precedente, con A ortogonale ossia $A^{-1} = A^T$. Vediamo allora che $\mathcal{F}$ commuta con le rotazioni:

$$\widehat{u \circ A} = \widehat{u} \circ A. \quad (1.6)$$

Pertanto u è a simmetria radiale (ossia $u \circ A = u$ per ogni $A \in O_n(\mathbb{R})$) se e solo se $\widehat{u}$ è a simmetria radiale.

- (5) **SCALING** $S_\lambda u(x) = u(\lambda x)$, $\lambda > 0$. Anche questo è un caso particolare del cambiamento di variabili lineare, e precisamente $A = \lambda I_n$. Si ha

$$\mathcal{F}S_\lambda = \lambda^{-n} S_{1/\lambda} \mathcal{F}. \quad (1.7)$$

In particolare, se u è omogenea di grado a ($S_\lambda u = \lambda^a u$) la sua trasformata è omogenea di grado $-n - a$.

- (6) **TRASLAZIONE** $\tau_h u(x) = u(x - h)$ e **SPOSTAMENTO DI FASE** $\Phi_h u(x) = e^{ih \cdot x} u(x)$, $h \in \mathbb{R}^n$. La trasformata di Fourier scambia traslazioni con spostamenti di fase e viceversa, infatti si ha

$$\mathcal{F}\tau_h = \Phi_{-h} \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\Phi_h = \tau_h \mathcal{F}. \quad (1.8)$$

ESERCIZIO 1.2. Dimostrare le precedenti formule, utilizzando opportuni cambiamenti di variabile.

2. Trasformata di Fourier e derivate

La proprietà che segue fa della trasformata di Fourier uno dei principali strumenti nello studio delle equazioni differenziali. Faremo uso della notazione standard $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

OSSERVAZIONE 2.1. Nella dimostrazione del prossimo risultato facciamo uso della proprietà seguente:

se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $f, \partial f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\int \partial_j f dx = 0$ per $j = 1, \dots, n$.

Verifichiamo la proprietà ad esempio per $j = 1$. Chiamiamo $g(x_1)$ la funzione

$$g(x_1) = \int |f(x_1, x')| dx'$$

dove abbiamo usato la notazione $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Si noti che per il Teorema di Fubini la funzione $g(t)$ è integrabile su $\mathbb{R}$, quindi in particolare è finita per quasi ogni t . Inoltre, per ogni M si ha

$$\inf_{t > M} g(t) = 0$$

(altrimenti si avrebbe $g(t) > \delta > 0$ per tutti i $t > M$ e quindi g non sarebbe integrabile). Questo vuol dire che possiamo trovare una successione $b_k \rightarrow +\infty$ tale che $g(b_k) \rightarrow 0$. Analogamente, possiamo trovare una successione $a_k \rightarrow -\infty$ tale che $g(a_k) \rightarrow 0$. Per finire basta scrivere, grazie a Fubini,

$$\int_{a_k}^{b_k} \int \partial_1 f(x) dx' dx_1 = \int f(b_k, x') dx' - \int f(a_k, x') dx'$$

e mandando $k \rightarrow +\infty$ otteniamo che il primo membro tende a $\int \partial_1 f dx$ (convergenza dominata), mentre il secondo membro tende a 0.

PROPOSIZIONE 2.2. Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile e $k \geq 1$ un intero.

- (i) Se $(1 + |x|)^k u \in L^1$ allora $\widehat{u} \in C^k$ e $x^\alpha \widehat{u} = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{u}$ per ogni $|\alpha| \leq k$.
(ii) Se $u \in C^k$ e $\partial^\alpha u \in L^1$ per ogni $|\alpha| \leq k$, allora $\widehat{\partial^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}$.

DIMOSTRAZIONE. Facciamo la dimostrazione solo per $k = 1$; il caso generale segue per induzione su k . Inoltre, senza perdita di generalità assumiamo $\alpha = e_1$.

(i): fissiamo $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e definiamo

$$G(t) = \int e^{-ix \cdot (t, \xi')} u(x) dx, \quad g(t) = \int -ix_1 e^{-ix \cdot (t, \xi')} u(x) dx.$$

Vorremmo dimostrare che $G(t)$ è C^1 e che $G' = g$; dall'ipotesi segue che g, G sono continue, quindi per il Teorema Fondamentale del Calcolo (di Analisi I) basta dimostrare che $\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a)$ per qualunque intervallo $[a, b]$. Dato che la funzione $(t, x) \mapsto ix_1 e^{-ix \cdot (t, \xi')} u(x)$ è L^1 su $[a, b] \times \mathbb{R}_x^n$, dal Teorema di Fubini otteniamo

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) dt &= \int \left(\int_a^b -ix_1 e^{-ix \cdot (t, \xi')} dt \right) u(x) dx \\ &= \int (e^{-ix \cdot (b, \xi')} - e^{-ix \cdot (a, \xi')}) u(x) dx = G(b) - G(a). \end{aligned}$$

Quindi $G(t)$ è C^1 e $g(t)$ è la sua derivata, ossia $\widehat{u}(\xi)$ è derivabile in ξ_1 con derivata continua $\partial_1 \widehat{u} = -ix_1 u$.

(ii): per ipotesi si ha che la funzione $f(x) = e^{-ix \cdot \xi} u(x) \in C_1$ (con ξ fissato) verifica $f \in C^1$ e $\partial f \in L^1$, quindi l'integrale su $\mathbb{R}^n$ di ogni sua derivata parziale si annulla:

$$-i\xi_1 \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx + \int e^{-ix \cdot \xi} \partial_{x_1} u(x) dx = 0$$

e quindi otteniamo $-i\xi_1 \widehat{u} + \widehat{\partial_{x_1} u} = 0$. $\square$

Se indichiamo con x^α l'operatore di moltiplicazione per x^α , e analogamente per ξ^α , le proprietà precedenti si possono riformulare come

$$\mathcal{F}x^\alpha = i^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \partial_x^\alpha = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

Quindi se $P(x)$ è un polinomio di grado k su $\mathbb{R}^n$, e se $u, \widehat{u}$ sono abbastanza regolari e integrabili, possiamo scrivere

$$\widehat{P(x)u} = P(i\partial_\xi) \widehat{u}, \quad \widehat{P(\partial_x)u} = P(i\xi) \widehat{u},$$

dove gli operatori $P(\partial_x)$ e $P(i\partial_\xi)$ sono definiti in modo ovvio. Vediamo che l'equazione differenziale a coefficienti costanti $P(\partial)u = f$ si riduce, applicando $\mathcal{F}$, all'equazione $P(i\xi)\widehat{u} = \widehat{f}$ che si dice *problema di divisione*: risolverlo, essenzialmente, vuol dire dare un senso alla formula $u = \mathcal{F}^{-1}\widehat{u} = \mathcal{F}^{-1}[P(i\xi)^{-1}\widehat{f}]$. Questo non è necessariamente più facile dell'equazione di partenza, ma dà informazioni importanti sulla struttura dell'equazione e dello spazio delle soluzioni.

Tra breve dimostreremo che $\mathcal{F}$ è iniettiva. La trasformata inversa soddisfa relazioni analoghe a quelle in (2.1):

$$\mathcal{F}^{-1}i^{|\alpha|}\xi^\alpha = \partial_x^\alpha \mathcal{F}^{-1}, \quad \mathcal{F}^{-1}i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha = x^\alpha \mathcal{F}^{-1}.$$

3. Trasformata di Fourier su $\mathcal{S}$

3.1. Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}$. Una funzione $\phi \in C^\infty$ si dice *rapidamente decrescente* se per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ si ha

$$p_k(\phi) := \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} < \infty. \quad (3.1)$$

Le p_k sono norme, e formano una successione crescente: $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots$. Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}$ è lo spazio vettoriale di tutte le funzioni rapidamente decrescenti. È uno spazio metrico con la distanza

$$d(\phi, \psi) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \frac{p_k(\phi - \psi)}{1 + p_k(\phi - \psi)}. \quad (3.2)$$

(Gli spazi muniti di metriche definite come in (3.2) sono detti di Fréchet; sono spazi localmente convessi metrizzabili completi con distanza invariante per traslazioni.) Le successioni convergenti di $\mathcal{S}$ si possono caratterizzare nel modo seguente:

$$\phi_j \rightarrow \phi \text{ in } \mathcal{S} \iff p_k(\phi_j - \phi) \rightarrow 0 \quad \forall k. \quad (3.3)$$

ESERCIZIO 3.1. Dimostrare che (3.2) è una metrica su $\mathcal{S}$ e che la convergenza in questa metrica è equivalente a (3.3).

Dato che $\mathcal{S}$ è uno spazio metrico, la topologia è completamente caratterizzata dalla conoscenza delle successioni convergenti.

PROPOSIZIONE 3.2. *I seguenti operatori lineari su $\mathcal{S}$ sono continui:*

- (i) le derivate ∂^α per ogni α ;
- (ii) la moltiplicazione per una funzione $a \in C^\infty$ tale che $\partial^\alpha a$ ha crescita polinomiale $\forall \alpha$;
- (iii) le traslazioni τ_h per $h \in \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è lasciata per esercizio; osserviamo solo che per verificare che un operatore $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continuo, basta verificare che se $\phi_j \rightarrow \phi$ in $\mathcal{S}$ allora $T\phi_j \rightarrow T\phi$ in $\mathcal{S}$. $\square$

Naturalmente le funzioni test sono in particolare anche funzioni rapidamente decrescenti, ossia vale l'inclusione $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

OSSERVAZIONE 3.3. Sia $p \in [1, \infty]$. Se sostituiamo la norma p_k nella definizione di $\mathcal{S}$ con la norma

$$p'_k(\phi) = \max_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq k} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^p}$$

otteniamo esattamente le stesse successioni convergenti (e quindi la stessa topologia). La dimostrazione di questo fatto è elementare ma richiede parecchi calcoli e la omettiamo.

ESERCIZIO 3.4. Dimostrare che lo spazio $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$ e che la convergenza in $\mathcal{D}$ implica la convergenza in $\mathcal{S}$. [Se $\phi \in \mathcal{S}$, basta prendere una funzione test $\chi \in C_c^\infty$ tale che $\chi(0) = 1$ e considerare la successione $\phi_j(x) = \chi(x/j)\phi(x)$. Allora $\phi_j \rightarrow \phi$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$ (considerare separatamente $|x| > M$ e $|x| \leq M$); dato che $x^\alpha \partial^\beta \phi$ è ancora in $\mathcal{S}$...]

ESERCIZIO 3.5. Dimostrare che se $\phi \in \mathcal{S}$ allora $x^\alpha \partial^\beta \phi \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$ per ogni α, β . Questo giustifica il nome di funzioni *rapidamente decrescenti* per gli elementi di $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO 3.6. Determinare quali tra le seguenti funzioni appartengono a $\mathcal{S}$: $\langle x \rangle^{-10}$, $e^{-|x|^2}$, $e^{-\langle x \rangle^{\frac{1}{2}}}$, $e^{-|x|}$.

3.2. L'azione di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{S}$. La trasformata di Fourier opera su $\mathcal{S}$:

PROPOSIZIONE 3.7. *Se $u \in \mathcal{S}$ allora $\widehat{u} \in \mathcal{S}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni α, β si ha $|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{u}| = |\xi^\beta \widehat{x^\alpha u}| = |\widehat{\partial^\beta x^\alpha u}|$. Da $u \in \mathcal{S}$ segue $\partial^\beta x^\alpha u \in L^1$, e grazie alla Proposizione 1.1 deduciamo $\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{u} \in L^\infty$. $\square$

Una prima conseguenza è il seguente risultato, detto *Lemma di Riemann-Lebesgue* su $\mathbb{R}^n$; ricordiamo che C_0^0 è lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ che tendono a zero all'infinito, ossia tali che $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

COROLLARIO 3.8 (Riemann-Lebesgue). *Se $u \in L^1$ allora $\widehat{u} \in C_0^0$.*

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni test sono dense in L^1 , quindi anche $\mathcal{S}$ è denso in L^1 . Data $u \in L^1$, sia $\phi_j \in \mathcal{S}$ una successione tale che $\phi_j \rightarrow u$ in L^1 . Scrivendo $\|\widehat{u} - \widehat{\phi}_j\|_{L^\infty} \leq \|\phi_j - u\|_{L^1} \rightarrow 0$ vediamo che $\widehat{u}$ è limite uniforme di una successione di $\mathcal{S}$ e quindi $\widehat{u} \in C_0^0$. $\square$

In particolare, la trasformata di Fourier di una funzione L^1 è uniformemente continua.

OSSERVAZIONE 3.9. Il Corollario 3.8 può essere dedotto anche dall'omonimo Lemma di Riemann Lebesgue sulla convergenza debole-* delle funzioni periodiche alla loro media.

Una delle proprietà più soddisfacenti della trasformata di Fourier è che la sua inversa si può scrivere in modo esplicito. Prima di dimostrarlo dobbiamo calcolare la trasformata di una Gaussiana $e^{-|x|^2}$.

ESERCIZIO 3.10. Dimostrare che $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}}$. [per $n = 2$ usare le coordinate polari. Per $n \geq 1$ usare l'identità $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2})^{\frac{n}{2}}$]

PROPOSIZIONE 3.11. La trasformata di Fourier di una Gaussiana è ancora una Gaussiana: per ogni $a > 0$ si ha

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(e^{-a|x|^2})(\xi)} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}. \quad (3.4)$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che $\mathcal{F}(e^{-|x|^2}) = \mathcal{F}(e^{-x_1^2}) \cdots \mathcal{F}(e^{-x_n^2})$ e che $\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \overline{\mathcal{F}(e^{-a|x|^2})}$ essendo la Gaussiana una funzione pari, basta dimostrare la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2 - isu} du = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$$

in dimensione 1. Partiamo dall'identità $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ e applichiamo il cambiamento di variabile $t = \sqrt{au} + \frac{s}{2\sqrt{a}}$ dove s è un numero reale fissato; otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2 - su} du = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4a}}.$$

Ora se sostituiamo a $s \in \mathbb{R}$ un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, i due lati dell'identità si estendono a funzioni olomorfe di z definite su tutto $\mathbb{C}$, che devono coincidere dato che coincidono sull'asse reale. In particolare coincidono per $z = is$ immaginario puro, e la dimostrazione è conclusa. $\square$

ESERCIZIO 3.12. Usando (3.4), dimostrare che la norma operatore di $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$ è esattamente 1.

3.3. La formula di inversione. Possiamo finalmente calcolare $\mathcal{F}^{-1}$.

TEOREMA 3.13 (Formula di inversione di Fourier). Sia $u \in L^1$ tale che $\widehat{u} \in L^1$. Allora $\widehat{u}$ è continua e u ha un rappresentante continuo che soddisfa per ogni x

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie al Teorema della convergenza dominata possiamo scrivere

$$\int \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x), \quad I_\epsilon(x) := \int \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi \quad (\epsilon > 0).$$

Dato che $\widehat{u}(\xi) = \int u(y) e^{-iy \cdot \xi} dy$ si ha

$$I_\epsilon(x) = \int \left(\int e^{i\xi \cdot (x-y)} e^{-\epsilon|\xi|^2} u(y) dy \right) d\xi$$

e possiamo notare che (grazie al fattore $e^{-\epsilon|\xi|^2}$) la funzione integranda appartiene a $L^1(\mathbb{R}_{y,\xi}^{2n})$. Per il Teorema di Fubini possiamo invertire l'ordine di integrazione:

$$I_\epsilon(x) = \int \left(\int e^{i\xi \cdot (x-y)} e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi \right) u(y) dy = \int p_\epsilon(x-y) u(y) dy = p_\epsilon * u(x)$$

dove p_ϵ è la trasformata di Fourier coniugata della Gaussiana $e^{-\epsilon|x|^2}$, che per (3.4) è uguale a $p_\epsilon(x) = (\frac{\pi}{\epsilon})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}$. Notiamo che $p_\epsilon(x) = \epsilon^{-\frac{n}{2}} p_1(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x)$ e che $\int p_1 dx = \pi^{\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = (2\pi)^n$. Applicando la prima Proposizione sulle regolarizzazioni possiamo concludere che $(2\pi)^{-n} p_\epsilon * u \rightarrow u$ in L^1 e quindi, estraendo una sottosuccessione, per quasi ogni x . Questo dimostra la formula di inversione; la continuità di u e $\widehat{u}$ è già stata dimostrata in precedenza. $\square$

Il risultato si può riscrivere in vari modi equivalenti:

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-n} R\mathcal{F}, \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^n I, \quad \mathcal{F}\mathcal{F} = (2\pi)^n R. \quad (3.5)$$

ESERCIZIO 3.14. Dimostrare le formule (3.5).

OSSERVAZIONE 3.15. Dal Teorema 3.13 segue che la trasformata di Fourier su L^1 è iniettiva: se $\mathcal{F}(u) = 0$ dalla formula di inversione segue ovviamente $u = 0$. Inoltre $\mathcal{F}$ è un automorfismo sullo spazio di funzioni L^1 aventi trasformata in L^1 .

ESERCIZIO 3.16. Se $u \in L^1$ è continua in 0 e $\widehat{u} \geq 0$, allora $\widehat{u} \in L^1$ e u è continua. (Suggerimento: Prendere $\phi \in C_c^\infty$ radialmente decrescente con $\phi(0) = 1$, notare che $\widehat{u}(\xi)\phi(\epsilon\xi) \uparrow \widehat{u} \geq 0$ per $\epsilon \downarrow 0$ e usare Beppo Levi.)

PROPOSIZIONE 3.17. $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è biiettiva e continua, con inversa continua.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già che $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$; l'iniettività segue dalla formula di inversione, e dato che $\mathcal{F}^{-1}$ è un multiplo di $\overline{\mathcal{F}}$ abbiamo anche la suriettività.

Dimostriamo che $\mathcal{F}$ è continua: basta dimostrare che se $\phi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}$ allora $\mathcal{F}\phi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}$. Grazie alla disuguaglianza di Hölder vediamo che preso $N > n$

$$\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^1} = \|(1 + |x|)^{-N} x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^1} \leq \|(1 + |x|)^{-N}\|_{L^1} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} \rightarrow 0$$

e quindi

$$\|\partial_\xi^\alpha (\xi^\beta \widehat{\phi}_k)\|_{L^\infty} = \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} \rightarrow 0.$$

Questo implica facilmente che $\widehat{\phi}_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}$ da cui la tesi. (la semplice verifica di quest'ultima affermazione è lasciata al lettore). Naturalmente anche $\overline{\mathcal{F}}$ e quindi $\mathcal{F}^{-1}$ sono continue. $\square$

ESERCIZIO 3.18. Dimostrare la formula $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} K\mathcal{F}K$.

3.4. Trasformata di Fourier e convoluzione. La trasformata di Fourier scambia prodotti di convoluzione con prodotti puntuali:

PROPOSIZIONE 3.19. Se $u, v \in L^1$ allora $\mathcal{F}(u*v) = \widehat{u}\widehat{v}$. Viceversa, se $u, v, \widehat{u}, \widehat{v} \in L^1$, allora $\mathcal{F}(uv) = (2\pi)^{-n} \widehat{u} * \widehat{v}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $u, v \in L^1$ allora la funzione $u(x-y)v(y)$ appartiene a $L^1_{x,y}$ e per il Teorema di Fubini possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u*v)(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} \left(\int u(x-y)v(y) dy \right) dx \\ &= \int v(y) \left(\int e^{-ix \cdot \xi} u(x-y) dx \right) dy \\ &= \int e^{-iy \cdot \xi} v(y) \left(\int e^{-i(x-y) \cdot \xi} u(x-y) dx \right) dy \\ &\stackrel{z=x-y}{=} \int e^{-iy \cdot \xi} v(y) \left(\int e^{-iz \cdot \xi} u(z) dz \right) dy = \widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi), \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza si è fatto uso del cambio di variabile $z = x - y$ solo nell'integrale interno.

Per dimostrare la seconda proprietà, ricordiamo che $\mathcal{F}$ è un automorfismo sullo spazio di funzioni L^1 aventi trasformata in L^1 , applichiamo $\mathcal{F}$ ad ambo i membri di $\widehat{u}\widehat{v} = \mathcal{F}(u * v)$ e ricordiamo che $\mathcal{F}\mathcal{F} = (2\pi)^n R$: otteniamo

$$\mathcal{F}(\widehat{u}\widehat{v}) = \mathcal{F}\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^n R(u * v) = (2\pi)^n (Ru) * (Rv) = (2\pi)^{-n} (\mathcal{F}\widehat{u}) * (\mathcal{F}\widehat{v})$$

e questa è precisamente la seconda proprietà (con $\widehat{u}, \widehat{v}$ al posto di u, v). $\square$

Si notino le formule equivalenti

$$\mathcal{F}^{-1}(u * v) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(u) \mathcal{F}^{-1}(v), \quad \mathcal{F}^{-1}(uv) = \mathcal{F}^{-1}(u) * \mathcal{F}^{-1}(v)$$

dato che ovviamente il risultato precedente vale anche per $\overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}$.

ESERCIZIO 3.20. Dimostrare le seguenti formule equivalenti

$$\mathcal{F}^{-1}(u * v) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(u) \mathcal{F}^{-1}(v), \quad \mathcal{F}^{-1}(uv) = \mathcal{F}^{-1}(u) * \mathcal{F}^{-1}(v).$$

[La Proposizione 3.19 vale anche per $\overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}$.]

4. La trasformata di Fourier su L^2

La teoria L^2 della trasformata di Fourier si basa sulla seguente semplice proposizione.

PROPOSIZIONE 4.1. Se $u, v \in L^1$ allora $\int \widehat{u}\widehat{v} dx = \int u\widehat{v} dx$.

DIMOSTRAZIONE. Basta scrivere esplicitamente i due integrali: usando il Teorema di Fubini si ottiene la stessa espressione $\iint e^{-ix \cdot \xi} u(x)v(\xi) dx d\xi$. $\square$

Usando le notazioni

$$\langle u, v \rangle := \int u(x)v(x) dx, \quad (u, v) := \int u(x)\overline{v(x)} dx$$

per due funzioni $u \in L^p, v \in L^{p'}$, si hanno le seguenti formule equivalenti:

$$\langle \mathcal{F}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{F}v \rangle, \quad (\mathcal{F}u, v) = (u, \overline{\mathcal{F}}v).$$

In breve, possiamo scrivere

$$\mathcal{F}^T = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}$$

ossia la trasposta di $\mathcal{F}$ per il prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ coincide con $\mathcal{F}$, mentre l'aggiunta di $\mathcal{F}$ per il prodotto L^2 coincide con $\overline{\mathcal{F}}$. Il passo successivo è meno elementare in quanto richiede la formula di inversione:

LEMMA 4.2. Se $u, v, \widehat{v} \in L^1$, allora $(u, v) = (2\pi)^{-n} (\widehat{u}, \widehat{v})$.

DIMOSTRAZIONE. $(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) = (u, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}v) = (2\pi)^n (u, v)$ per la Proposizione 4.1 e la formula di inversione. $\square$

TEOREMA 4.3. La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ (così come $\overline{\mathcal{F}}$) si estende a un operatore limitato su L^2 , che si indica ancora con $\mathcal{F}$ (e $\mathcal{F}(u)$ si indica anche con $\widehat{u}$). L'operatore esteso soddisfa le proprietà seguenti.

- (i) Per ogni $u, v \in L^2$ si ha $\langle \widehat{u}, v \rangle = \langle u, \widehat{v} \rangle$.
- (ii) PARSEVAL: per ogni $u, v \in L^2$ si ha $(\widehat{u}, \widehat{v}) = (2\pi)^n (u, v)$.
- (iii) PLANCHEREL: per ogni $u \in L^2$ si ha $\|\widehat{u}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2}$.
- (iv) $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ è un'isometria da L^2 su tutto L^2 .
- (v) FORMULA DI INVERSIONE: valgono le identità (R è la riflessione)

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}, \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^n I, \quad \mathcal{F}\mathcal{F} = (2\pi)^n R.$$

(vi) Le regole (1.3)–(1.8) nel Paragrafo 1 sono valide anche per l'operatore esteso.

(vii) Se $u \in L^2$ e $v \in L^1$ allora $\mathcal{F}(u * v) = \widehat{u}\widehat{v}$. Se inoltre $\widehat{v} \in L^1$ allora $\mathcal{F}(uv) = (2\pi)^{-n} \widehat{u} * \widehat{v}$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 4.1 e dal Lemma 4.2 otteniamo che (i), (ii), (iii) sono vere per ogni $u, v \in \mathcal{S}$, in particolare $\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2}$ per tutte le $u \in \mathcal{S}$. Dato che $\mathcal{S}$ è denso in L^2 , questo dimostra che $\mathcal{F}$ si estende a un operatore lineare limitato su L^2 (così come anche $\overline{\mathcal{F}}$). Per densità (i), (ii), (iii), (v) e (vi) sono valide per tutte le $u, v \in L^2$, (vii) è valida sotto le ipotesi elencate, mentre (iv) è solo una riformulazione di (iii). $\square$

OSSERVAZIONE 4.4 (Autofunzioni di $\mathcal{F}$). Se normalizziamo $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ definendo

$$\mathcal{F}_1 := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}, \quad \overline{\mathcal{F}}_1 := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\mathcal{F}},$$

allora $\mathcal{F}_1$ e $\overline{\mathcal{F}}_1$ sono isometrie di L^2 su di sé. Il quadrato di $\mathcal{F}_1$ è l'operatore di riflessione e possiamo scrivere

$$\overline{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1^{-1}, \quad \mathcal{F}_1^2 = R, \quad \mathcal{F}_1^4 = I.$$

Pertanto l'operatore $\mathcal{F}_1$ ha periodo 4. Ne segue che gli unici possibili autovalori di $\mathcal{F}_1$ sono $\pm 1, \pm i$, e in effetti lo spettro dell'operatore $\mathcal{F}_1$ su L^2 è esattamente

$$\sigma(\mathcal{F}_1) = \{+1, -1, +i, -i\} = \{i^k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Infatti, da (3.4) abbiamo $\mathcal{F}_1[e^{-|x|^2/2}](\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ quindi $\psi_0 = e^{-|x|^2/2}$ è una autofunzione per l'autovalore $i^0 = 1$. Ma allora, se α è un multi-indice non nullo e poniamo $\psi_\alpha(x) = (x - \partial_x)^\alpha e^{-|x|^2/2}$, abbiamo subito

$$\mathcal{F}_1[(x - \partial_x)^\alpha e^{-|x|^2/2}](\xi) = (-i)^{|\alpha|} (\xi - \partial_\xi)^\alpha e^{-|\xi|^2/2}$$

e quindi ψ_α è un'autofunzione per l'autovalore $(-i)^{|\alpha|}$.

ESERCIZIO 4.5. Dimostrare che se $u \in L^2$ e definiamo $u_R = u \cdot \mathbf{1}_{|x| \leq R}$, allora $u_R \in L^1$ e $\widehat{u}_R$ è una successione di Cauchy in L^2 per $R \rightarrow \infty$. Dimostrare che il limite in L^2 di $\widehat{u}_R$ coincide con $\widehat{u}$ definito come nel Teorema 4.3. Dedurne che se $u \in L^1 \cap L^2$ la $\mathcal{F}u$ definita in (1.1) e quella definita nel Teorema 4.3 coincidono (Tale fatto può essere dedotto anche come conseguente della Proposizione 4.1, dalla proprietà (i) del Teorema 4.3 e dal lemma di Du Bois-Reymond).

ESERCIZIO 4.6. Sia $u \in L^2$. Usando la trasformata di Fourier dimostrare che $\tau_h u \rightarrow 0$ debolmente in L^2 per $|h| \rightarrow \infty$. [$\int \tau_h u \cdot \overline{v} dx = \int e^{-ih \cdot \xi} \widehat{u} \overline{\widehat{v}} = \mathcal{F}(\widehat{u} \overline{\widehat{v}})(h) \rightarrow 0$ dal Lemma di Riemann–Lebesgue.]

5. La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'$

5.1. Distribuzioni temperate. Conosciamo già lo spazio $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ delle distribuzioni su $\mathbb{R}^n$. Gli elementi di $\mathcal{D}'$ possono avere crescita arbitrariamente veloce all'infinito: ad esempio qualunque funzione continua come e^{x^2} o $e^{e^{x^2}}$ appartiene a $\mathcal{D}'$ (essendo in L^1_{loc}). Non è possibile estendere facilmente la trasformata di Fourier a oggetti con crescita troppo forte; è necessario definire un sottospazio di $\mathcal{D}'$ di distribuzioni “a crescita al più polinomiale”.

Una *distribuzione temperata* è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$ (a valori in $\mathbb{C}$); si ricordi che $\mathcal{S}$ è uno spazio metrico con la metrica definita da (3.1), (3.2). Quindi lo spazio delle distribuzioni temperate è il duale di $\mathcal{S}$ e si indica con $\mathcal{S}'$. Si noti che un funzionale T lineare continuo su $\mathcal{S}$ è anche un funzionale lineare continuo su $\mathcal{D}$ (infatti T ristretto a $\mathcal{D}$ è ancora lineare, e se $\phi_j \rightarrow \phi$ in $\mathcal{D}$ allora converge anche in $\mathcal{S}$ quindi $T(\phi_j) \rightarrow T(\phi)$): in altri termini, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

In seguito denoteremo le distribuzioni temperate prevalentemente con u , essendo particolarmente interessati a distribuzioni T_u rappresentate da funzioni. La convergenza di una successione di distribuzioni temperate è caratterizzata come segue:

$$u_j \rightarrow u \quad \text{in } \mathcal{S}' \quad \iff \quad u_j(\phi) \rightarrow u(\phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}. \quad (5.1)$$

OSSERVAZIONE 5.1. Su $\mathcal{S}'$, e più in generale sul duale di ogni spazio vettoriale topologico, si possono definire varie topologie rilevanti distinte tra loro. Tuttavia, grazie alla particolare struttura dello spazio $\mathcal{S}$, se applichiamo queste diverse nozioni di topologia alle *successioni* di distribuzioni temperate, otteniamo sempre la stessa nozione di convergenza che è proprio quella definita in (5.1). Anche se in generale non basta conoscere le successioni convergenti per determinare univocamente la topologia, finché usiamo solo successioni convergenti negli argomenti che seguono, non avremo necessità di specificare l'esatta topologia di cui $\mathcal{S}'$ è munito.

Per stabilire se un funzionale lineare su $\mathcal{S}$ è continuo, ossia se è una distribuzione temperata, si può usare il criterio seguente:

PROPOSIZIONE 5.2. *Sia $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Allora $u \in \mathcal{S}'$ se e solo se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta:*

- (i) $u(\phi_j) \rightarrow u(\phi)$ per ogni $\phi_j \rightarrow \phi$ in $\mathcal{S}$;
- (ii) esistono C, k tali che $|u(\phi)| \leq Cp_k(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$.

DIMOSTRAZIONE. Dato che $\mathcal{S}$ è uno spazio metrico, continuità equivale a continuità per successioni. e questa è proprio la proprietà (i). È chiaro inoltre che (ii) implica (i): infatti presa una successione $\phi_j \rightarrow \phi$ in $\mathcal{S}$ allora $p_k(\phi_j - \phi) \rightarrow 0$ per ogni k , e quindi da (ii) si ha $u(\phi_j - \phi) \rightarrow 0$ ossia vale la (i).

Viceversa, per verificare che (i) implica (ii) osserviamo anzitutto che la distanza $d(\phi, 0)$ soddisfa la stima

$$d(\phi, 0) \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \frac{p_j(\phi)}{1+p_j(\phi)} + \sum_{j>k} 2^{-j} \leq p_k(\phi) + 2^{-k}$$

per ogni k , dato che $p_j \leq p_k$ per $j \leq k$. Ora, se u soddisfa (i) (e quindi è continua), possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $|u(\phi)| \leq 1$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ che soddisfa $d(\phi, 0) < \epsilon$. Prendiamo k così grande che $2^{-k} < \epsilon/2$ e notiamo che

$$p_k(\phi) \leq \frac{\epsilon}{2} \implies d(\phi, 0) \leq p_k(\phi) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies |u(\phi)| \leq 1,$$

allora per la linearità di u abbiamo $|u(\phi)| \leq \frac{2}{\epsilon} p_k(\phi)$ per ogni ϕ . $\square$

ESERCIZIO 5.3. Se $\phi_N \rightarrow \phi$ in $\mathcal{S}$ e $u_N \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'$, allora $u_N(\phi_N) \rightarrow u(\phi)$.

5.2. Operazioni su $\mathcal{S}'$. La *somma* di due distribuzioni temperate e il prodotto per un numero complesso z sono le solite operazioni nello spazio vettoriale $\mathcal{S}'$, e coincidono con quelle definite su $\mathcal{D}'$. Inoltre su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ abbiamo esteso le derivate di ogni ordine e la convoluzione con funzioni test. Cominciamo a esaminare queste operazioni nell'ambito di $\mathcal{S}'$ (la convoluzione la tratteremo più avanti).

- (1) DERIVAZIONE. Come per $\mathcal{D}'$, la *derivata parziale (distribuzionale)* $\partial_j u$ di $u \in \mathcal{S}'$ è

$$\partial_j u(\phi) := -u(\partial_j \phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}.$$

In generale, per ogni multiindice α si definisce

$$\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}.$$

È chiaro che $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'$. Quindi una distribuzione temperata ha derivate distribuzionali di ogni ordine, che sono ancora distribuzioni temperate; questo include naturalmente le funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Se $u \in \mathcal{S}' \cap C^k$, si verifica facilmente che la derivata distribuzionale di ordine $|\alpha| \leq k$ coincide con la derivata classica, ossia vale $\partial^\alpha T_u = T_{\partial^\alpha u}$: la derivata distribuzionale di u coincide con la distribuzione indotta dalla derivata classica di u .

- (2) **MULTIPLICAZIONE PER UNA FUNZIONE A CRESCITA MODERATA.** Diciamo che una funzione $a \in C^\infty$ è a *crescita moderata* se le sue derivate $\partial^\alpha a(x)$ crescono al più polinomialmente per $|x| \rightarrow \infty$, per tutti gli α . Il prodotto di $a(x)$ con una distribuzione temperata u si definisce come

$$au(\phi) := u(a\phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}.$$

(Notare che se non si impone una condizione di crescita su a , la formula $au(\varphi) = u(a\varphi)$ potrebbe non avere senso: infatti se $\varphi \in \mathcal{S}$ e $a \in C^\infty$ a crescita arbitraria, non abbiamo garanzia che $a\varphi \in \mathcal{S}$). Vale ancora la *formula di Leibniz*: per $u \in \mathcal{S}'$ e $a \in C^\infty$ a crescita moderata,

$$\partial^\alpha(a \cdot u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} a \cdot \partial^\beta u. \quad (5.2)$$

- (3) **SIMMETRIE.** L'azione delle simmetrie sugli elementi di $\mathcal{S}'$ si definisce nel modo naturale: per ogni $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$ definiamo

$$\begin{aligned} \text{riflessione} & \quad Ru(\phi) := u(R\phi) \\ \text{traslazione} & \quad \tau_h u(\phi) := u(\tau_{-h}\phi) \\ \text{scaling} & \quad S_\lambda u(\phi) := u(\lambda^{-n} S_{1/\lambda}\phi) \\ \text{lineare} & \quad u \circ A(\phi) := u(|\det A|^{-1} \phi \circ A^{-1}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

OSSERVAZIONE 5.4 (Divisione per un polinomio). Se $P(x)$ è un polinomio, l'operatore di moltiplicazione $u \mapsto Pu$ è un operatore continuo su $\mathcal{S}'$. Hörmander dimostrò che esso ammette un inverso continuo: se P è un polinomio non identicamente nullo, la *divisione per P* , ossia $u \mapsto u/P$ si estende a un operatore ben definito e continuo su $\mathcal{S}'$.

ESERCIZIO 5.5. Dimostrare che l'operatore di moltiplicazione $u \mapsto au$ per una funzione $a(x)$ di classe C^∞ a crescita moderata è un operatore continuo per successioni su $\mathcal{S}'$ [se $u_j \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'$, allora $u_j(a\phi) \rightarrow u(a\phi)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ il che significa che $au_j \rightarrow au$ in $\mathcal{S}'$]. Dimostrare poi la regola di Leibniz (5.2).

ESERCIZIO 5.6. Dimostrare che l'operatore $\partial^\alpha : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è continuo per successioni [se $u_j \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'$, allora per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ si ha $u_j(\partial^\alpha \phi) \rightarrow u(\partial^\alpha \phi)$ il che implica $\partial^\alpha u_j \rightarrow \partial^\alpha u$].

5.3. Esempi di distribuzioni temperate. La mappa $u \mapsto T_u$ che ad una funzione u associa la distribuzione $T_u(\phi) = \int u\phi dx$, iniettiva per il Lemma di du Bois-Reymond, permette di identificare i principali spazi di funzioni con sottospazi di $\mathcal{S}'$. Notare che adesso $\varphi \in \mathcal{S}$ può non avere supporto compatto, quindi non basta supporre $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

ESEMPIO 5.7 ($L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$). Se $u \in L^p$ per qualche $p \in [1, \infty]$ allora $u \in \mathcal{S}'$. Infatti dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$|u(\phi)| \leq \|u\|_{L^p} \|\phi\|_{L^{p'}} \leq \|u\|_{L^p} \cdot p_N(\phi)$$

per N abbastanza grande ($N = n + 1$ è sufficiente). Quindi la mappa $u \mapsto T_u$ immerge gli spazi L^p iniettivamente in $\mathcal{S}'$. Questa immersione è anche continua: questo vuol dire che $u_j \rightarrow u$ in L^p implica $u_j \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'$ (applicare la disuguaglianza precedente a $u_j - u$).

Quindi è possibile derivare qualunque funzione $u \in L^p$ un numero arbitrario di volte in $\mathcal{S}'$; come al solito, in generale tali derivate non saranno funzioni ma solo distribuzioni.

ESEMPIO 5.8 ($Pol \cdot L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$). Più in generale, qualunque funzione u della forma $P(x)v$ dove $P(x)$ è un polinomio e $v \in L^p$ per qualche p si può identificare

con una distribuzione temperata (la dimostrazione è simile alla precedente). Questo esempio comprende le funzioni omogenee

$$|x|^a \quad \text{per} \quad a \in (-n, \infty)$$

e le funzioni

$$|x|^a \log |x| \quad \text{per} \quad a \in (-n, \infty).$$

Infatti basta scrivere

$$|x|^a = (1 + |x|^2)^N \cdot |x|^a (1 + |x|^2)^{-N},$$

$$|x|^a \log |x| = (1 + |x|^2)^N \cdot |x|^a \log |x| (1 + |x|^2)^{-N}$$

e notare che $|x|^a (1 + |x|^2)^{-N}$ e $|x|^a \log |x| (1 + |x|^2)^{-N}$ appartengono a L^1 se $N > a + n$.

ESEMPIO 5.9 (Delta di Dirac). Ricordiamo la definizione:

$$\delta(\phi) := \phi(0).$$

È ovvio che $\delta \in \mathcal{S}'$, dalla disuguaglianza $|\delta(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$. Lo stesso vale per la *delta di Dirac in x_0* data da $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$; si tratta di una traslazione della delta di Dirac, ossia $\delta_{x_0} = \tau_{x_0}\delta$. La derivata $\partial^\alpha \delta$, secondo la definizione generale, è la distribuzione data da

$$\partial^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(0).$$

ESEMPIO 5.10. La *funzione di Heaviside* su $\mathbb{R}$ è la funzione $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$, ossia, $H(x) = 0$ per $x < 0$, $H(x) = 1$ per $x > 0$. Dato che $H \in L^\infty(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata. La sua derivata H' coincide con la delta di Dirac in 0:

$$H'(\phi) := -H(\phi') = \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) \implies H' = \delta.$$

La *funzione segno* si definisce come $\text{sgn}(x) = \pm 1$ per $\pm x > 0$ e $\text{sgn}(0) = 0$, e un calcolo simile dà (dato che $\text{sgn} = H - RH$ q.o.)

$$(\text{sgn})' = 2\delta.$$

Non è difficile dimostrare che se $u \in \mathcal{S}'$ è una funzione C^1 a tratti, ad esempio C^1 per $x \leq 0$ e $x \geq 0$, con un salto in $x = 0$, allora la sua derivata distribuzionale è uguale alla derivata puntuale più $(u(0^+) - u(0^-))\delta$.

ESEMPIO 5.11 (Successioni delta). La successione ρ_ϵ dei mollificatori standard soddisfa

$$\rho_\epsilon \rightarrow \delta \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'.$$

Per dimostrarlo basta osservare che $\int \rho_\epsilon(y)\phi(y)dy \rightarrow \phi(0)$ per qualunque funzione continua e quindi per ogni $\phi \in \mathcal{S}$. Vediamo che la stessa proprietà vale più in generale:

PROPOSIZIONE 5.12. *Se $\|p\|_{L^1} = 1$ e $p_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}p(\epsilon^{-1}x)$ allora $p_\epsilon \rightarrow \delta$ in $\mathcal{S}'$.*

DIMOSTRAZIONE. Vogliamo dimostrare che per ogni $\psi \in \mathcal{S}$ si ha, per $\epsilon \rightarrow 0$,

$$p_\epsilon(\psi) \rightarrow \psi(0). \tag{5.4}$$

Notiamo che $p_\epsilon(\psi) = \int p_\epsilon(y)\psi(y)dy = \int p_\epsilon(y)R\psi(-y)dy = p_\epsilon * R\psi(0)$; dalla Proposizione 3.1 del Capitolo 3 segue che se $\phi \in C_c$ allora $p_\epsilon * \phi \rightarrow \phi$ uniformemente, quindi in particolare $p_\epsilon * R\phi(0) \rightarrow \phi(0)$ ossia la (5.4) è vera se ψ è a supporto compatto.

Se ψ non è a supporto compatto, dato che C_c^∞ è denso in $\mathcal{S}$, fissato $\sigma > 0$ possiamo trovare ϕ funzione test tale che $\|\phi - \psi\|_{L^\infty} < \sigma$ e abbiamo

$$p_\epsilon(\psi) - \psi(0) = p_\epsilon(\psi - \phi) + p_\epsilon(\phi) - \phi(0)$$

dato che $\phi(0) = \chi(0)\psi(0) = \psi(0)$. Abbiamo allora

$$|p_\epsilon(\psi - \phi)| \leq \|p_\epsilon\|_{L^1} \|\phi - \psi\|_{L^\infty} \leq \sigma;$$

inoltre, se ϵ è abbastanza piccolo, dal passo precedente si ha

$$|p_\epsilon(\phi) - \phi(0)| < \sigma$$

e quindi in conclusione

$$|p_\epsilon(\psi) - \psi(0)| \leq 2\sigma$$

per ϵ abbastanza piccolo. Essendo σ arbitrario otteniamo la (5.4). $\square$

ESEMPIO 5.13 (Valore principale di $1/x$). Ricordiamo che la distribuzione $\text{vp}(\frac{1}{x})$ su $\mathbb{R}$, detta *valore principale di $1/x$* , è definita da

$$\text{vp}(\frac{1}{x})(\phi) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Mostriamo che tale limite esiste:

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{x} dx \rightarrow \int_{|x|<1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

per $\epsilon \rightarrow 0^+$; quindi l'ultima espressione si può usare come definizione alternativa di $\text{vp}(\frac{1}{x})$. Ne segue anche la stima

$$|\text{vp}(\frac{1}{x})(\phi)| \leq 2\|\phi'\|_{L^\infty} + \|x\phi\|_{L^\infty}$$

e questo implica che $\text{vp}(\frac{1}{x})$ è una distribuzione temperata. Inoltre vale l'identità

$$\text{vp}(\frac{1}{x}) = (\log|x|)'. \quad (5.5)$$

Infatti, integrando per parti otteniamo, per qualunque $\phi \in \mathcal{S}$,

$$-\int_{|x|>\epsilon} \log|x| \cdot \phi'(x) dx = \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \log(\epsilon)[\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)]$$

e mandando $\epsilon \downarrow 0$ abbiamo la (5.5). Una conseguenza utile di (5.5) è la seguente

PROPOSIZIONE 5.14. $\frac{x}{x^2+\epsilon^2} \rightarrow \text{vp}(\frac{1}{x})$ in $\mathcal{S}'$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che $\frac{1}{2} \log(x^2 + \epsilon^2) \rightarrow \log|x|$ in $\mathcal{S}'$ per $\epsilon \rightarrow 0$ (convergenza dominata). Osserviamo ora che se $u_j \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora anche per le derivate si ha $u'_j \rightarrow u'$ in $\mathcal{S}'$, dato che $u'_j(\phi) = -u_j(\phi') \rightarrow -u(\phi')$. Derivando la successione $\frac{1}{2} \log(x^2 + \epsilon^2)$ otteniamo la tesi. $\square$

ESERCIZIO 5.15. Se $a > -n$, scrivere la funzione $|x|^a$ nella forma Pv per qualche polinomio $P(x)$ e qualche $v \in L^p$. Che si può dire se $a \leq -n$?

ESERCIZIO 5.16. Dimostrare che δ non è una funzione [se $\delta = T_u$ per qualche $u \in L^1_{loc}$ allora $u = 0$ q.o. dal lemma di Du Bois–Reymond].

ESERCIZIO 5.17. Trovare una funzione $u \in C^\infty$ tale che $T_u \notin \mathcal{S}'$.

5.4. Distribuzioni con supporto in 0. Diciamo che $u \in \mathcal{S}'$ ha *supporto in 0* se $u(\phi) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \notin \text{supp } \phi$. Le distribuzioni con supporto in 0 si possono caratterizzare esplicitamente; esse sono le combinazioni lineari finite di derivate di δ . Questo fatto ha varie applicazioni importanti.

PROPOSIZIONE 5.18. Sia $u \in \mathcal{S}'$ supportata in 0. Allora esiste un polinomio P tale che $u = P(\partial)\delta$.

DIMOSTRAZIONE. (facoltativa). Se $\phi \in \mathcal{S}$, dato che $\partial^\alpha(\phi(\epsilon x)) = \epsilon^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(\epsilon x)$, abbiamo $|\partial^\alpha(\phi(\epsilon x))| \leq C(\alpha, \phi)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \epsilon < 1$, con C che dipende solo da α, ϕ . Allora dalla regola di Leibniz otteniamo che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$

$$\chi, \phi \in \mathcal{S} \implies |\partial^\alpha(x^\beta \chi(x) \phi(\epsilon x))| \leq C(\alpha, \beta, \chi, \phi) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n, 0 < \epsilon < 1.$$

Usando l'operatore di riscalatura $S_{1/\epsilon}\chi(x) = \chi(x/\epsilon)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x) &= \epsilon^{|\beta|} S_{1/\epsilon}(x^\beta \chi(x) \phi(\epsilon x)) \implies \\ \implies \partial^\alpha [x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x)] &= \epsilon^{|\beta| - |\alpha|} S_{1/\epsilon} \partial^\alpha (x^\beta \chi(x) \phi(\epsilon x)) \end{aligned}$$

e in conclusione, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \epsilon < 1$,

$$|\partial^\alpha [x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x)]| \leq \epsilon^{|\beta| - |\alpha|} C(\alpha, \beta, \chi, \phi).$$

Sia ora u come nell'enunciato. Dato che $u \in \mathcal{S}'$, esistono due costanti C, k tali che $|u(\phi)| \leq Cp_k(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$. Applichiamo questa stima alla funzione $x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x)$ dove χ è una funzione test supportata in $|x| \leq 1$ e $0 < \epsilon < 1$:

$$|u(x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x))| \leq Cp_k(x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x)) \leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha (x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x))\|_{L^\infty}$$

(possiamo ignorare i pesi nelle norme p_k dato che $|x| \leq 1$). Dalla stima precedente si ha

$$|u(x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x))| \leq \epsilon^{|\beta| - k} C(\beta, k, \chi, \phi)$$

per ogni $0 < \epsilon < 1$. Se supponiamo inoltre che χ sia una funzione test uguale a 1 in un intorno di 0, essendo u supportata in 0 abbiamo $u(x^\beta \phi(x)) = u(x^\beta \chi(x/\epsilon) \phi(x))$; prendendo $|\beta| > k$ nella stima precedente e mandando $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$u(x^\beta \phi(x)) = 0 \text{ per ogni } |\beta| > k \text{ e } \phi \in \mathcal{S}.$$

Per concludere la dimostrazione, osserviamo che ogni $\phi \in \mathcal{S}$ si può scrivere, usando la formula di Taylor con resto integrale, nella forma

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \phi(0) + \sum_{|\alpha| = k+1} x^\alpha r_\alpha(x)$$

per opportuni $r_\alpha \in C^\infty$. Moltiplicando ambo i membri per χ e applicando u otteniamo, come richiesto,

$$u(\phi) = u(\phi\chi) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \phi(0), \quad c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} u(x^\alpha \chi)$$

dato che $u(x^\alpha \phi\chi) = 0$ per $|\alpha| = k+1$. □

ESERCIZIO 5.19. Trovare tutte le $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tali che $xu = 0$.

5.5. Convoluzione in $\mathcal{S}'$. La convoluzione di $u \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$ è data da

$$u * \varphi(x) = u(\varphi^x) \equiv u(\phi(x - \cdot))$$

dove φ^x indica la funzione $y \mapsto \varphi(x - y)$. Naturalmente questa definizione coincide con quella per $\mathcal{D}'$ se φ è una funzione test. Su $\mathcal{S}'$ abbiamo il risultato seguente di cui omettiamo la semplice dimostrazione:

PROPOSIZIONE 5.20. *Se $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$, allora:*

- (i) *La convoluzione $u * \phi$ è una funzione C^∞ a crescita moderata (e quindi una distribuzione temperata).*
- (ii) *Per ogni α si ha $\partial^\alpha (u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi)$.*
- (iii) *Se $u \in \mathcal{S}'$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, allora $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$.*
- (iv) *Se $u \in \mathcal{S}'$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, allora $(u * \varphi)(\psi) = u(R\varphi * \psi)$.*

ESEMPIO 5.21 (Identità del prodotto di convoluzione). La delta di Dirac ha la proprietà $\delta * \phi = \phi$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$, come si verifica subito dalla definizione. Vale a dire, δ è una identità per il prodotto di convoluzione.

5.6. La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'$. Data $u \in \mathcal{S}'$, la *trasformata di Fourier* e la *trasformata di Fourier coniugata* di u sono i funzionali su $\mathcal{S}$ definiti per trasposizione:

$$\mathcal{F}u(\phi) := u(\mathcal{F}\phi), \quad \overline{\mathcal{F}}u(\phi) := u(\overline{\mathcal{F}}\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \quad (5.6)$$

Usiamo anche la notazione $\widehat{u} \equiv \mathcal{F}u$ come al solito. La continuità di $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ su $\mathcal{S}$ assicura che $\mathcal{F}u$ e $\overline{\mathcal{F}}u$ sono distribuzioni temperate, quindi abbiamo definito due operatori lineari $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ e $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$. Inoltre, vale quanto segue:

PROPOSIZIONE 5.22. *Gli operatori $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ e $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ sono lineari, biiettivi e continui (per successioni). Inoltre*

- (i) *Vale la formula di inversione $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^n I$.*
- (ii) *Per ogni $u \in \mathcal{S}'$ e α si ha $\widehat{x^\alpha u} = i^{|\alpha|} \partial^\alpha u$ e $\widehat{\partial^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}$.*
- (iii) *Le regole (1.3)–(1.8) nel Paragrafo 1 sono vere anche per la trasformata su $\mathcal{S}'$.*
- (iv) *Se $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$ si ha $\mathcal{F}(u * \phi) = \widehat{u}\widehat{\phi}$ e $\mathcal{F}(u\phi) = (2\pi)^{-n} \widehat{u} * \widehat{\phi}$.*

DIMOSTRAZIONE. La continuità per successioni di $\mathcal{F}$ (e $\overline{\mathcal{F}}$) si verifica subito: presa una successione $u_j \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'$, per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ si ha $\widehat{u}_j(\phi) = u_j(\widehat{\phi}) \rightarrow u(\widehat{\phi}) = \widehat{u}(\phi)$ e questo dimostra che $\widehat{u}_j \rightarrow \widehat{u}$ in $\mathcal{S}'$ (analoga dimostrazione per $\overline{\mathcal{F}}$). Per dimostrare (i) basta scrivere

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}u(\phi) = \overline{\mathcal{F}}u(\mathcal{F}\phi) = u(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\phi) = (2\pi)^n u(\phi)$$

dove abbiamo usato la proprietà corrispondente di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{S}$; in particolare, ne segue la biiettività e la suriettività di $\mathcal{F}$ (e la continuità di $\mathcal{F}^{-1}$). Le proprietà (ii)–(iii) si dimostrano in modo analogo.

Per dimostrare (iv), notiamo anzitutto che se $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$ vale la formula $u(\phi) = u * R\phi(0)$: infatti $u * \phi(0) = u(\phi^0)$ e $\phi^0 = \phi(0 - y) = R\phi$. Prendiamo ora una qualunque $\psi \in \mathcal{S}$ e scriviamo

$$\mathcal{F}(u * \phi)(\psi) = (u * \phi)(\widehat{\psi}) = (u * \phi * R\widehat{\psi})(0) = (u * R(R\phi * \widehat{\psi}))(0) = u(R\phi * \widehat{\psi}).$$

Ma allora grazie all'identità $R\phi * \widehat{\psi} = \mathcal{F}(\widehat{\phi}\psi)$ (verificare!), concludiamo che

$$= u(\mathcal{F}(\widehat{\phi}\psi)) = \widehat{u}(\widehat{\phi}\psi) = \widehat{\phi}\widehat{u}(\psi).$$

La seconda identità in (iv) segue dalla prima applicando $\mathcal{F}$ ad ambo i membri, esattamente come nel caso $u, \phi \in \mathcal{S}$. $\square$

OSSERVAZIONE 5.23. La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'$ è un'estensione di quella su L^1 e su L^2 : infatti, se $u \in L^1$ (o L^2) possiamo scrivere per ogni $\phi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{T_u}(\phi) = T_u(\widehat{\phi}) = \int u\widehat{\phi}dx = \int \widehat{u}\phi dx = T_{\widehat{u}}(\phi)$$

il che significa che se consideriamo u come una distribuzione e calcoliamo la sua trasformata secondo la nuova definizione, il risultato coincide con la vecchia definizione $\widehat{u}$. Si noti che in questo modo siamo riusciti a definire in un colpo solo la trasformata di qualunque funzione L^p , di funzioni poco regolari a crescita polinomiale, e di molte altre funzioni e distribuzioni.

OSSERVAZIONE 5.24 (Regolarizzazione in $\mathcal{S}'$). Come applicazione, vediamo che usando la trasformata di Fourier è molto semplice estendere la nozione di regolarizzazione alle distribuzioni temperate. Se $u \in \mathcal{S}'$, la *regolarizzata* di u è la convoluzione $u_\epsilon = u * \rho_\epsilon$ con il mollificatore di Friedrichs ρ_ϵ . Allora $u_\epsilon \rightarrow u$ in $\mathcal{S}'$: infatti, $\mathcal{F}u_\epsilon(\phi) = \widehat{u}\widehat{\rho}_\epsilon(\phi) = \widehat{u}(\widehat{\rho}(\epsilon\xi)\phi(\xi))$ e si verifica subito che $\widehat{\rho}(\epsilon\xi)\phi(\xi) \rightarrow \phi$ in $\mathcal{S}$ per $\epsilon \rightarrow 0$, e quindi $\mathcal{F}u_\epsilon(\phi) \rightarrow \widehat{u}(\phi)$. Quindi abbiamo dimostrato che

$$\text{se } u \in \mathcal{S}' \text{ allora } \rho_\epsilon * u \rightarrow u \text{ in } \mathcal{S}'.$$

6. Esempi

L'espressione esplicita della trasformata di Fourier di certe funzioni di particolare importanza contiene una quantità sorprendente di informazioni. Questo ha molte applicazioni in analisi, in particolare alle equazioni differenziali. Vediamo qualche esempio.

ESEMPIO 6.1 (Delta di Dirac e polinomi). $\mathcal{F}\delta$ è la funzione costante 1:

$$\mathcal{F}\delta(\phi) = \delta(\widehat{\phi}) = \widehat{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = 1(\phi).$$

Dato che $\mathcal{F}\mathcal{F} = (2\pi)^n R$ e δ è una distribuzione pari, ne deduciamo

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^n \delta.$$

Commutando $\mathcal{F}$ con una traslazione, dalle formule precedenti abbiamo anche

$$\mathcal{F}\delta_{x_0} = e^{-ix_0 \cdot \xi} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}e^{ix_0 \cdot \xi} = (2\pi)^n \delta_{x_0}.$$

Se invece commutiamo con una derivata otteniamo

$$\mathcal{F}(\partial_j \delta) = i\xi_j \quad \text{e} \quad \mathcal{F}x_j = (2\pi)^n i\partial_j \delta.$$

Più in generale, per ogni polinomio P su $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\mathcal{F}P(\partial)\delta = P(i\xi) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}P(x) = (2\pi)^n P(i\partial)\delta.$$

ESEMPIO 6.2 (Teorema di Liouville). Una distribuzione temperata $u \in \mathcal{S}'$ si dice *armonica* se $\Delta u = 0$. Mostriamo che tutte le distribuzioni armoniche temperate sono polinomi, e in particolare se u è limitata allora deve essere costante.

Applicando $\mathcal{F}$ all'equazione $\Delta u = 0$ otteniamo

$$-|\xi|^2 \widehat{u} = 0$$

ossia il prodotto $|\xi|^2 \widehat{u}$ è la distribuzione nulla. Da questo segue che $\widehat{u}$ è una distribuzione con supporto in 0. Infatti se $\psi \in \mathcal{S}$ è tale che $0 \notin \text{supp } \psi$, la funzione $\phi = |\xi|^{-2} \psi(\xi)$ è ancora in $\mathcal{S}$ e possiamo scrivere

$$\widehat{u}(\psi) = \widehat{u}(|\xi|^2 |\xi|^{-2} \psi) = |\xi|^2 \widehat{u}(\phi) = 0.$$

Ma allora esiste un polinomio P tale che

$$\widehat{u} = P(\partial)\delta$$

e applicando $\overline{\mathcal{F}}$ concludiamo

$$(2\pi)^n u = P(-ix)$$

ossia u è un polinomio in x .

ESEMPIO 6.3 (Funzione di Heaviside e funzione segno). Sia $n = 1$ e $H(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$. Consideriamo le funzioni $e^{-\epsilon x} H(x)$ per $\epsilon > 0$ e notiamo che $e^{-\epsilon x} H \rightarrow H$ in $\mathcal{S}'$ per $\epsilon \rightarrow 0$. Allora

$$\mathcal{F}(e^{-\epsilon x} H)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon x - ix\xi} dx = \frac{1}{\epsilon + i\xi} = \frac{\epsilon}{\xi^2 + \epsilon^2} - i \frac{\xi}{\xi^2 + \epsilon^2}$$

e ricordando le Proposizioni 5.12 (dove prendiamo $p = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$) e 5.14 otteniamo, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\widehat{H} = \pi\delta - i \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right). \quad (6.1)$$

D'altra parte, la funzione $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si può scrivere come $\text{sgn} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} - \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} = H - RH$. Dato che δ è pari, $\text{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right)$ è dispari, e $\mathcal{F}R = R\mathcal{F}$, otteniamo

$$\widehat{\text{sgn}} = \widehat{H} - R\widehat{H} = -2i \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right). \quad (6.2)$$

Una formulazione equivalente (usando $\mathcal{F}\mathcal{F} \text{sgn} = 2\pi R \text{sgn} = -2\pi \text{sgn}$) è la seguente:

$$\widehat{\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)} = -\pi i \cdot \text{sgn}. \quad (6.3)$$

ESEMPIO 6.4 (Trasformata di Hilbert). La *trasformata di Hilbert* di $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è definita come la convoluzione con $\pi^{-1}\mathbf{vp}(\frac{1}{x})$:

$$\mathbf{H}\phi := \frac{1}{\pi}\mathbf{vp}(\frac{1}{x}) * \phi = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|y| > \epsilon} \frac{\phi(x-y)}{y} dy. \quad (6.4)$$

Da (6.3) si ha

$$\widehat{\mathbf{H}\phi} = \widehat{\frac{1}{\pi}\mathbf{vp}(\frac{1}{x})} \cdot \widehat{\phi} = \frac{1}{i} \operatorname{sgn} \cdot \widehat{\phi} \implies \widehat{\mathbf{H}\phi}(\xi) = \frac{1}{i} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{\phi}(\xi). \quad (6.5)$$

Ne deduciamo che

$$\|\mathbf{H}\phi\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$$

e che $\mathbf{H}$ si estende a un'isometria $\mathbf{H} : L^2 \rightarrow L^2$ data da

$$\mathbf{H}\phi = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{i} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{\phi}(\xi)\right).$$

ESERCIZIO 6.5. Verificare che $\mathbf{H}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$. Dedurne che $\mathbf{H}$ non opera né su L^1 né su L^∞ .

ESEMPIO 6.6 (Trasformata di $\langle x \rangle^{-2}$). Sia $n = 1$. Notiamo che

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-x} dx = -\frac{i}{\xi-i} \implies \widehat{e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}} = -\frac{i}{\xi-i}$$

e che

$$\int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi} e^x dx = \frac{i}{\xi+i} \implies \widehat{e^x\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}} = \frac{i}{\xi+i}.$$

Sommando le due formule otteniamo

$$\widehat{e^{-|x|}} = \frac{2}{1+\xi^2} \quad \text{o equivalentemente} \quad \widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-|\xi|}. \quad (6.6)$$

(L'ultima formula di solito viene dimostrata con il calcolo dei residui).

ESEMPIO 6.7 (Gaussiana complessa). Sappiamo già che $\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$ per $a > 0$. L'estensione di questa formula a valori complessi di a è molto importante. Si noti che la Gaussiana $e^{-z|x|^2}$ è una distribuzione temperata se e solo se $\Re z \geq 0$.

Ricordiamo che se z è un numero complesso che non sta sull'asse reale negativo, in forma polare abbiamo $z = |z|e^{i\theta}$ con $|z| > 0$ e $\theta \in (-\pi, \pi)$. Per tali z , la *determinazione positiva della radice quadrata* è definita come

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}. \quad (6.7)$$

Questa è esattamente la continuazione olomorfa di $\sqrt{a} > 0$ per $a > 0$ al piano complesso tagliato lungo l'asse reale negativo.

PROPOSIZIONE 6.8. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ con $\Re z \geq 0$. Allora

$$\mathcal{F}(e^{-z|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}},$$

dove in $z^{-\frac{n}{2}} = (\sqrt{z})^{-n}$ usiamo la *determinazione positiva della radice quadrata* (6.7).

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le funzioni

$$F(z) := \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}} \quad \text{e} \quad G(z) = \int e^{-ix \cdot \xi} e^{-z|x|^2} dx$$

definite sul semipiano complesso aperto $D = \{\Re z > 0\}$. Esse sono olomorfe su D , e coincidono sull'asse reale positivo $z = a > 0$, quindi $F \equiv G$ su D : questo dimostra la formula per $\Re z > 0$.

Ora, prendiamo una successione $z_k \in D$ tale che $z_k \rightarrow it$, $t \neq 0$ reale. Per ogni $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\int \left(\frac{\pi}{z_k}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z_k}} \phi(x) dx \rightarrow \int \left(\frac{\pi}{it}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4it}} \phi(x) dx$$

dalla convergenza dominata; questo significa

$$\left(\frac{\pi}{z_k}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z_k}} \longrightarrow \left(\frac{\pi}{it}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4it}} \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

D'altra parte

$$\int e^{-z_k|x|^2} \phi(x) dx \rightarrow \int e^{-it|x|^2} \phi(x) dx$$

sempre per convergenza dominata; questo significa

$$e^{-z_k|x|^2} \longrightarrow e^{-it|x|^2} \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Dato che $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è continua, e dato che sappiamo già che

$$\mathcal{F}(e^{-z_k|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{z_k}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z_k}},$$

mandando $k \rightarrow \infty$ otteniamo la tesi. □

Dalla formula $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} R\mathcal{F}$ abbiamo, per gli stessi valori di z ,

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-z|x|^2}) = \left(\frac{1}{4\pi z}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}.$$