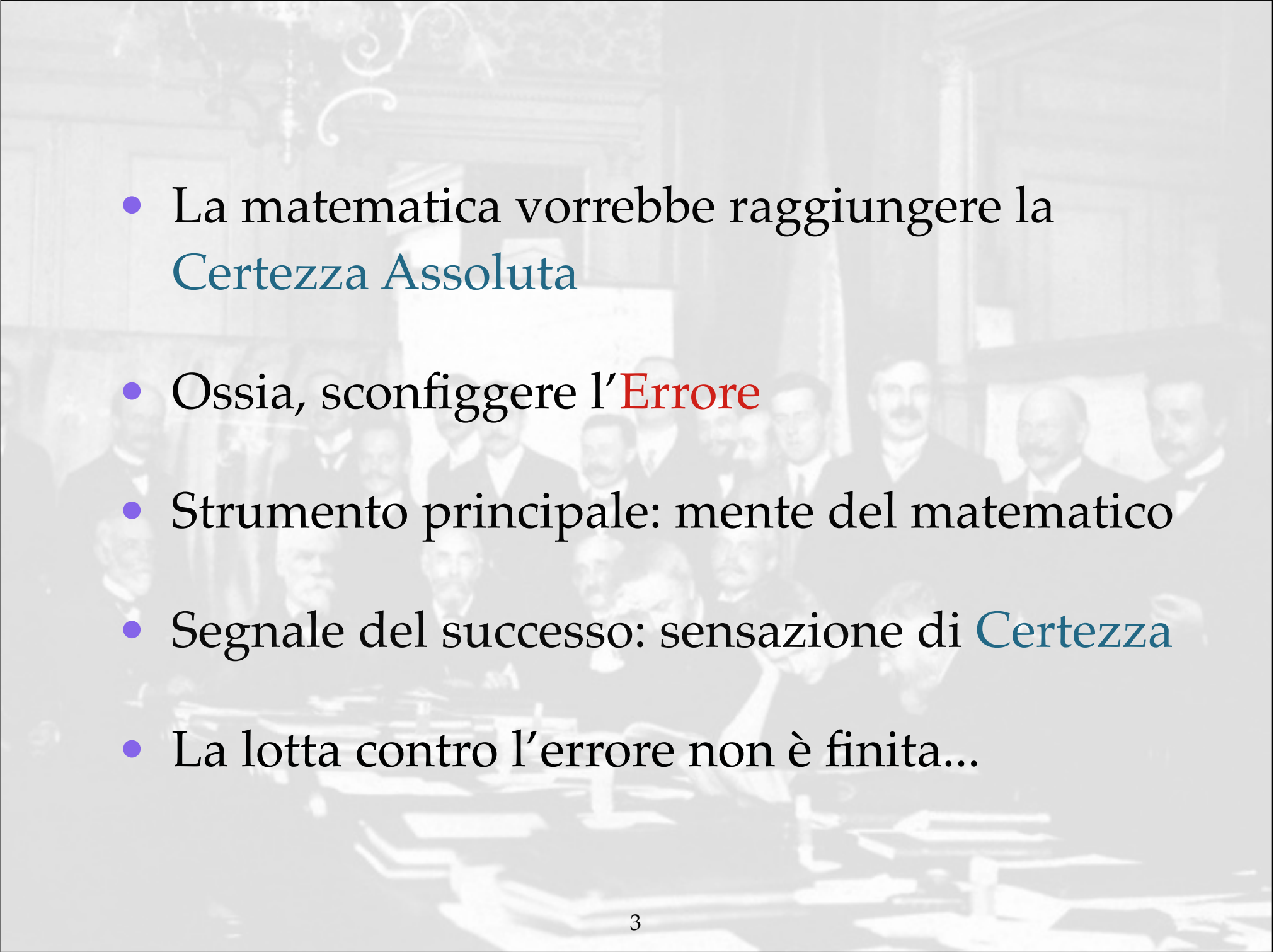


L'errore in matematica

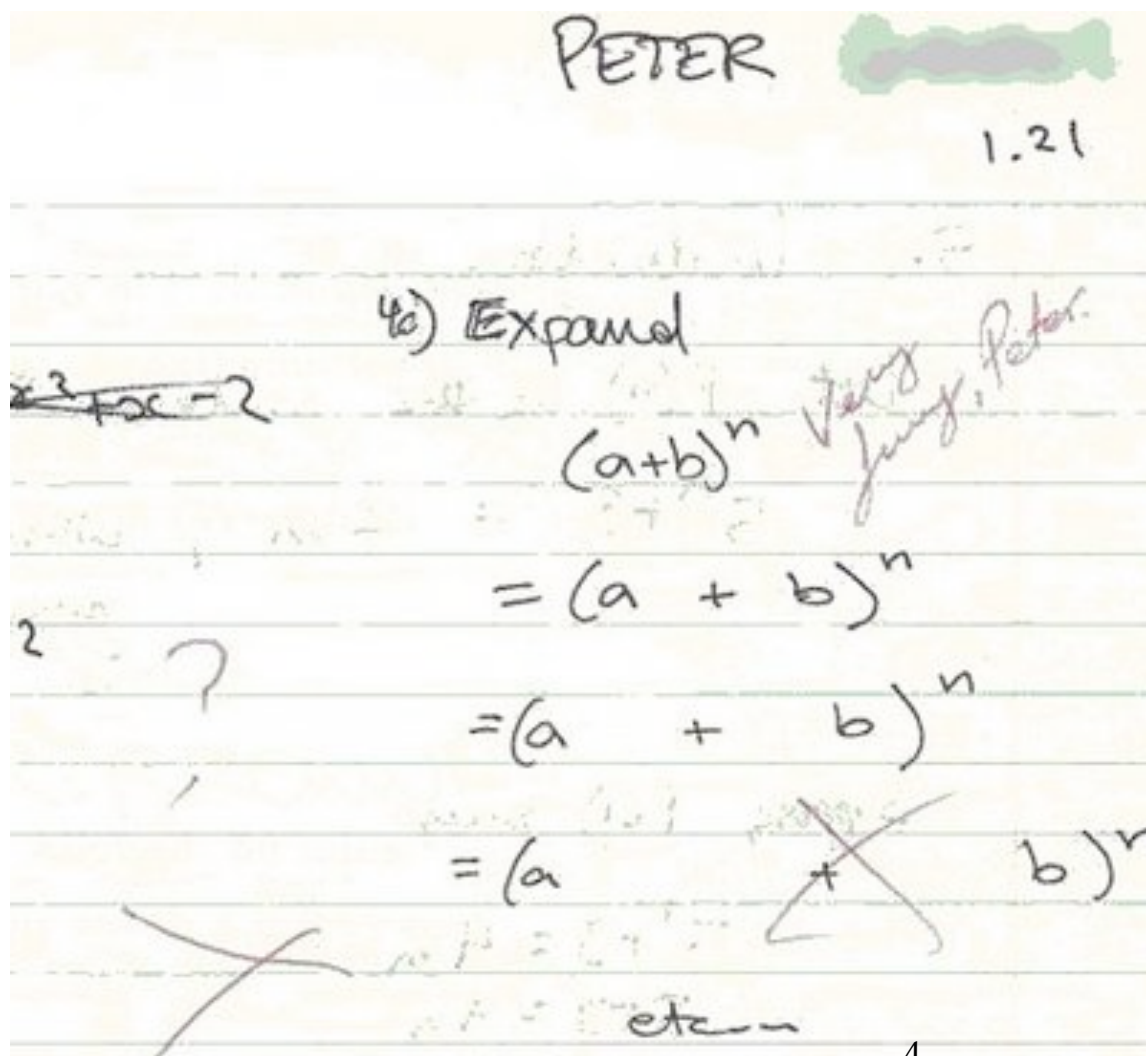
Piero D'Ancona
Sapienza - Università di Roma

1 Introduzione

- Art. 533 C.P.P. (modif. 12 / 1 / 2006):
l'imputato può essere condannato solo se
la sua colpevolezza sia provata
“al di là di ogni ragionevole dubbio”
- Il metodo scientifico ricorda un processo
- ...specialmente in matematica

- 
- La matematica vorrebbe raggiungere la **Certezza Assoluta**
 - Ossia, sconfiggere l'**Errore**
 - Strumento principale: mente del matematico
 - Segnale del successo: sensazione di **Certezza**
 - La lotta contro l'errore non è finita...

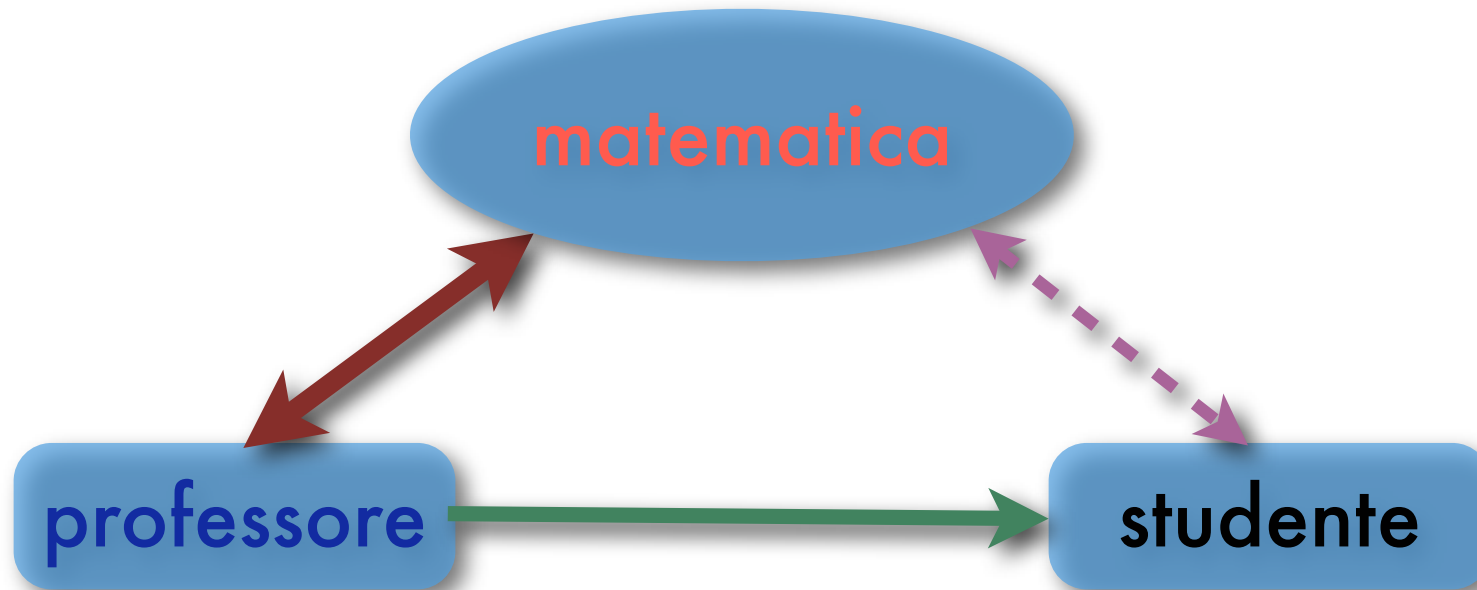
2 L'errore scolastico



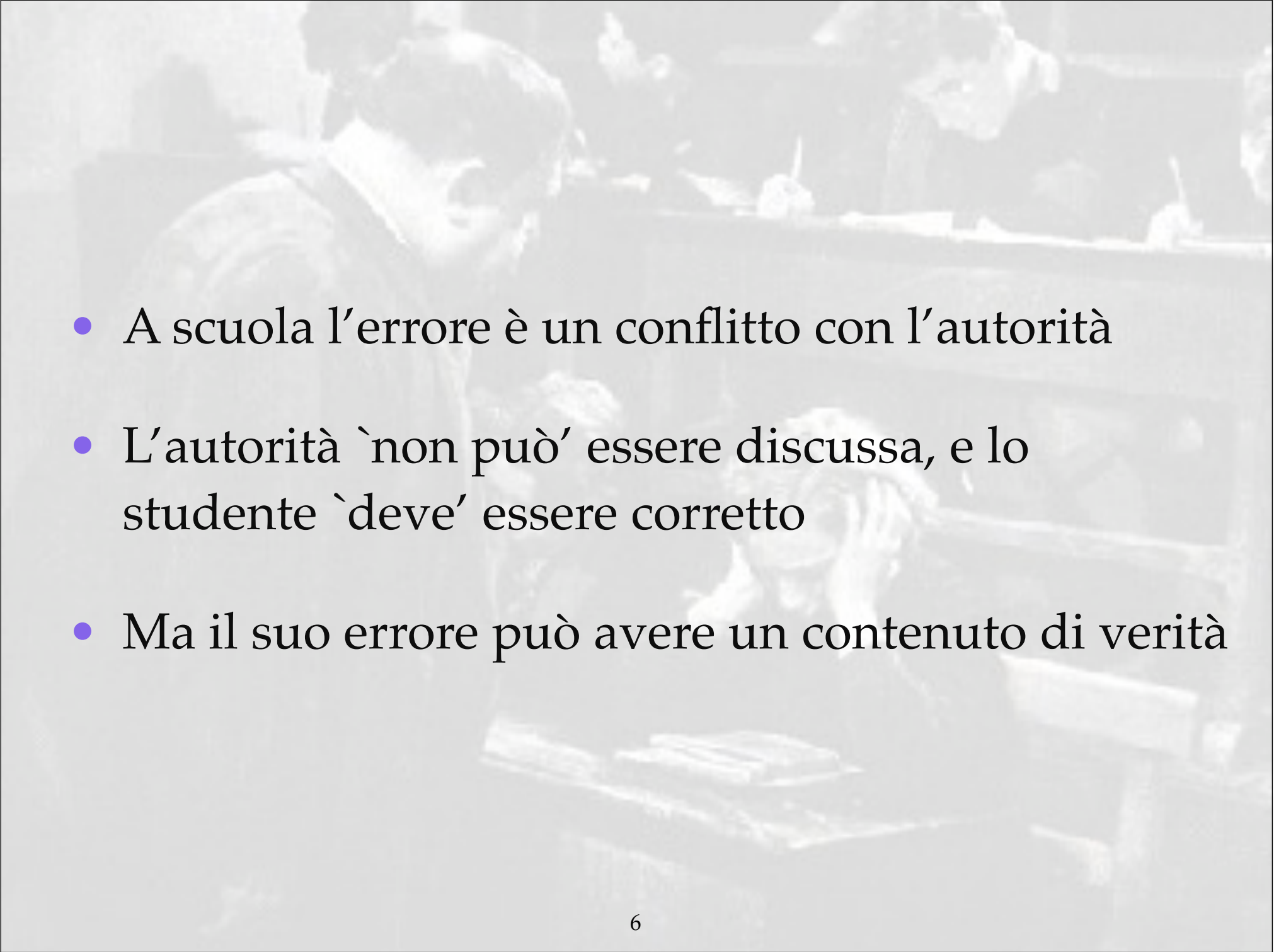
L'errore
dello
studente
è
'esterno'
alla
matematica

(qui vorremmo
parlare di quello
'interno')

A lezione si è in **3**:



Facile scivolare nel triangolo:
giustizia, **giudice**, imputato. (Paura!)

- 
- A scuola l'errore è un conflitto con l'autorità
 - L'autorità `non può' essere discussa, e lo studente `deve' essere corretto
 - Ma il suo errore può avere un contenuto di verità

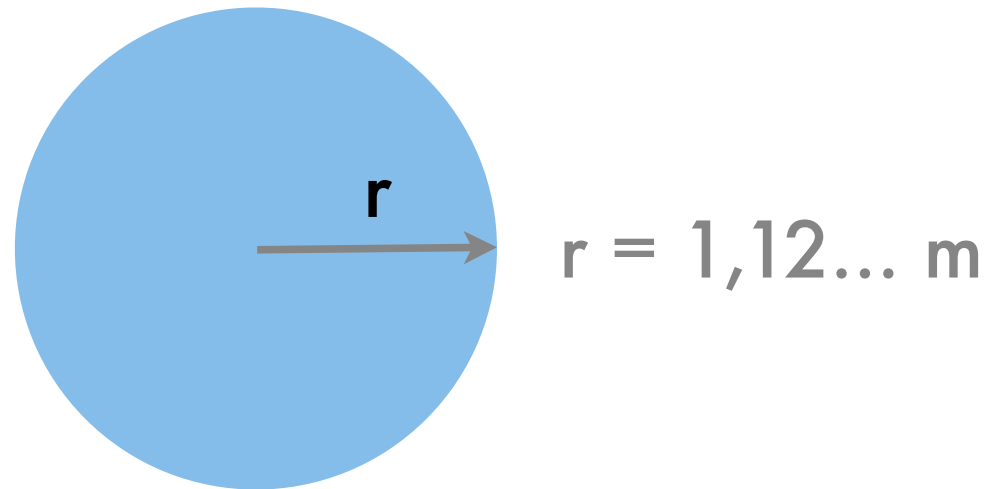
- Un punto di vista interessante: l'errore è uno **scontro di protocolli**
- Esempio: a Calcolo I insisto che **1** e **π** sono oggetti simili (numeri reali)
- Due ore dopo, il Prof. di Analisi Numerica insiste che si tratta di oggetti diversissimi
- ...proprio quello che pensava lo studente, due ore prima, nella stessa aula...
- Ma parliamo dell'errore **`interno'**

3 L'errore numerico

- Approssimare i numeri
- $\pi = 3?$
- $\pi = 3,14?$
- $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019.....$

938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116
861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012858361603563707660104710181942955596198946767837449448255379774
726847104047534646208046684259069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035587640247496473263914199272604269
922796782354781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509302955321165344987202755960236480
665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793800081647060016145249192173217214772350141441973568548161361157
352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627232791786
085784383827967976681454100953883786360950680064225125205117392984896084128488626945604241965285022210661186306744278622039194945047
123713786960956364371917287467764657573962413890865832645995813390478027590099465764078951269468398352595709825822620522489407726719
478268482601476990902640136394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221696461515709858387410597885959772975498930161
753928468138268683868942774155991855925245953959431049972524680845987273644695848653836736222626099124608051243884390451244136549762
780797715691435997700129616089441694868555848406353422072225828488648158456028506016842739452267467678895252138522549954666727823986
456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710893145669136867228748940560101503308617928680920
874760917824938589009714909675985261365549781893129784821682998948722658804857564014270477555132379641451523746234364542858444795265
867821051141354735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934403742007310578539062198387447808478489683321445
713868751943506430218453191048481005370614680674919278191197939952061419663428754440643745123718192179998391015919561814675142691239
748940907186494231961567945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346722182562599661501421503068038447
734549202605414665925201497442850732518666002132434088190710486331734649651453905796268561005508106658796998163574736384052571459102
897064140110971206280439039759515677157700420337869936007230558763176359421873125147120532928191826186125867321579198414848829164470
609575270695722091756711672291098169091528017350671274858322287183520935396572512108357915136988209144421006751033467110314126711136
990865851639831501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918535893226185489632132933089857064204675259
070915481416549859461637180270981994309924488957571282890592323326097299712084433573265489382391193259746366730583604142813883032038
249037589852437441702913276561809377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485963766983895228684783123552658213
144957685726243344189303968642624341077322697802807318915441101044682325271620105265227211166039666557309254711055785376346682065310
989652691862056476931257058635662018558100729360659876486117910453348850346113657686753249441668039626579787718556084552965412665408
530614344431858676975145661406800700237877659134401712749470420562230538994561314071127000407854733269939081454664645880797270826683
063432858785698305235808933065757406795457163775254202114955761581400250126228594130216471550979259230990796547376125517656751357517
829666454779174501129961489030463994713296210734043751895735961458901938971311179042978285647503203198691514028708085990480109412147
221317947647772622414254854540332157185306142288137585043063321751829798662237172159160771669254748738986654949450114654062843366393
790039769265672146385306736096571209180763832716641627488880078692560290228472104031721186082041900042296617119637792133757511495950
156604963186294726547364252308177036751590673502350728354056704038674351362222477158915049530984448933309634087807693259939780541934
144737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516735381297416772947867242292465436680098067692823828068996
400482435403701416314965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122893578601588161755782973523344604281512
627203734314653197777416031990665541876397929334419521541341899485444734567383162499341913181480927777103863877343177207545654532207
770921201905166096280490926360197598828161332316663652861932668633606273567630354477628035045077723554710585954870279081435624014517
180624643626794561275318134078330336254232783944975382437205835311477119926063813346776879695970309833913077109870408591337464144282
277263465947047458784778720192771528073176790770715721344473060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304
781643788518529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520985803385072242648293972858478316305777756068887644624.....

- Se **tronchiamo**, introduciamo un **errore**

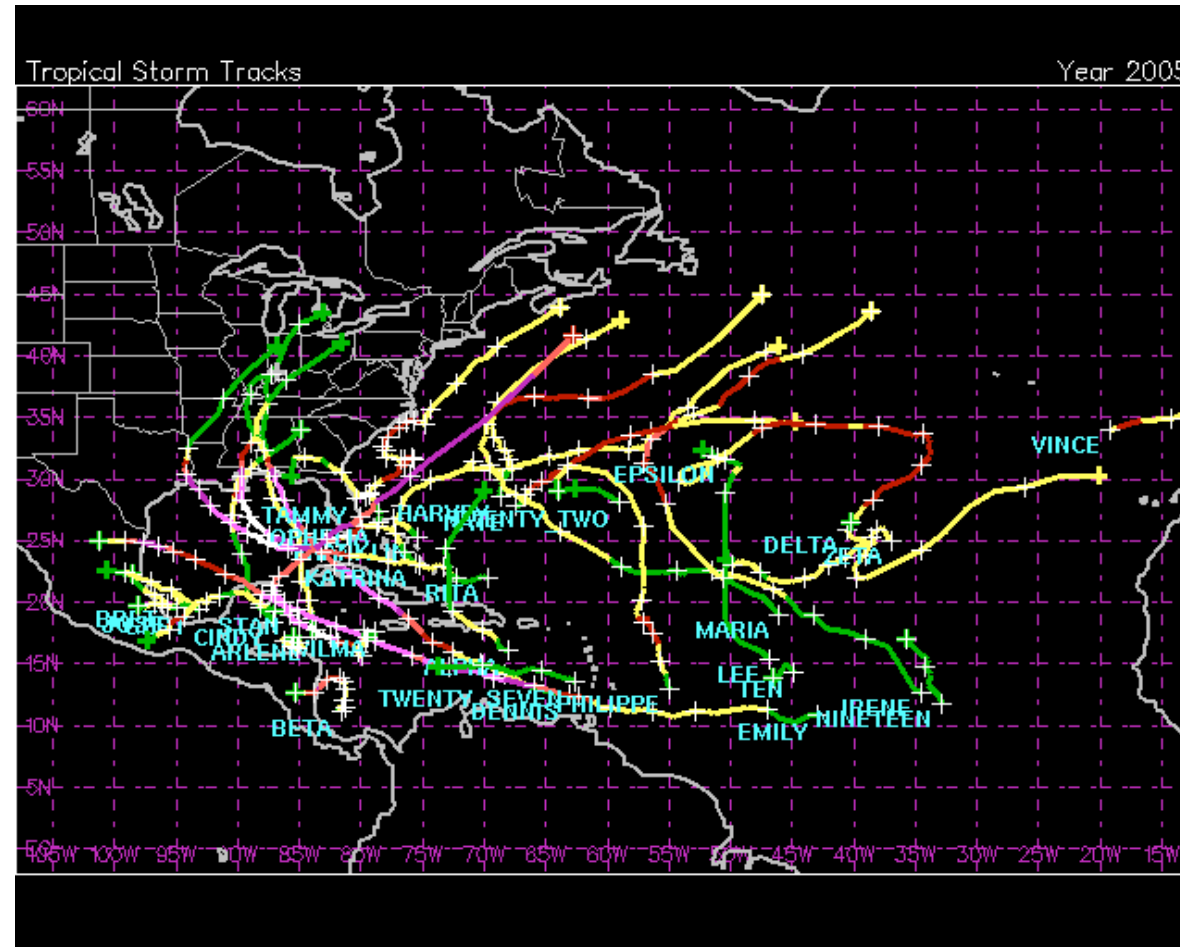


$$\text{Area} = r \times r \times \pi$$

$$\text{Area} = 1,12... \times 1,12... \times 3,14... = 3.938816 ??$$

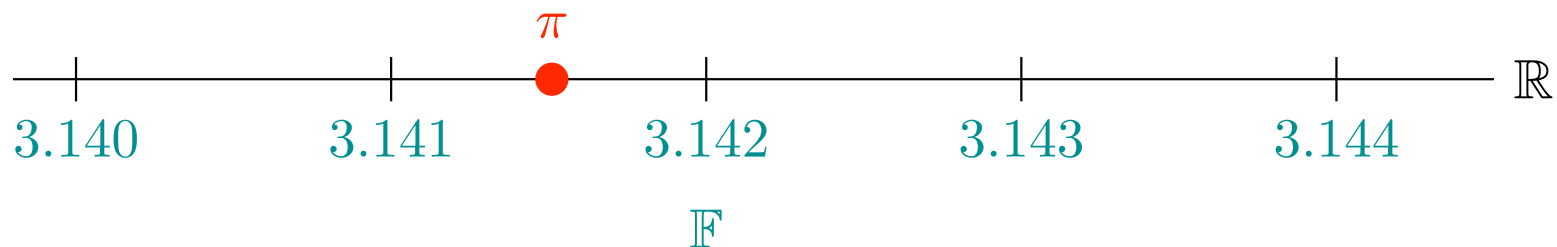
Quante cifre sono esatte?

- Il problema diventa di importanza drammatica nelle applicazioni (simulazioni numeriche)



Percorsi degli uragani 2005 (Unisys)

- C'è una `soluzione' semplice
- Un computer può rappresentare solo **alcuni** numeri: un insieme finito e discreto F
- Se un numero cade in un intervallo tra due numeri di F , si identifica con tale intervallo



- L'**interval arithmetic** sostituisce ai numeri gli intervalli e definisce operazioni fra di essi. Ad esempio:

$1,12\dots$ è l'intervallo $[1,12 \quad 1,13]$

$\pi = 3,14\dots$ è l'intervallo $[3,14 \quad 3,15]$

$$[1,12 \quad 1,13] \times [1,12 \quad 1,13] \times [3,14 \quad 3,15] =$$

$$[3.938816 \quad 4.022235]$$

cioè

$$[3.93 \quad 4.03]$$

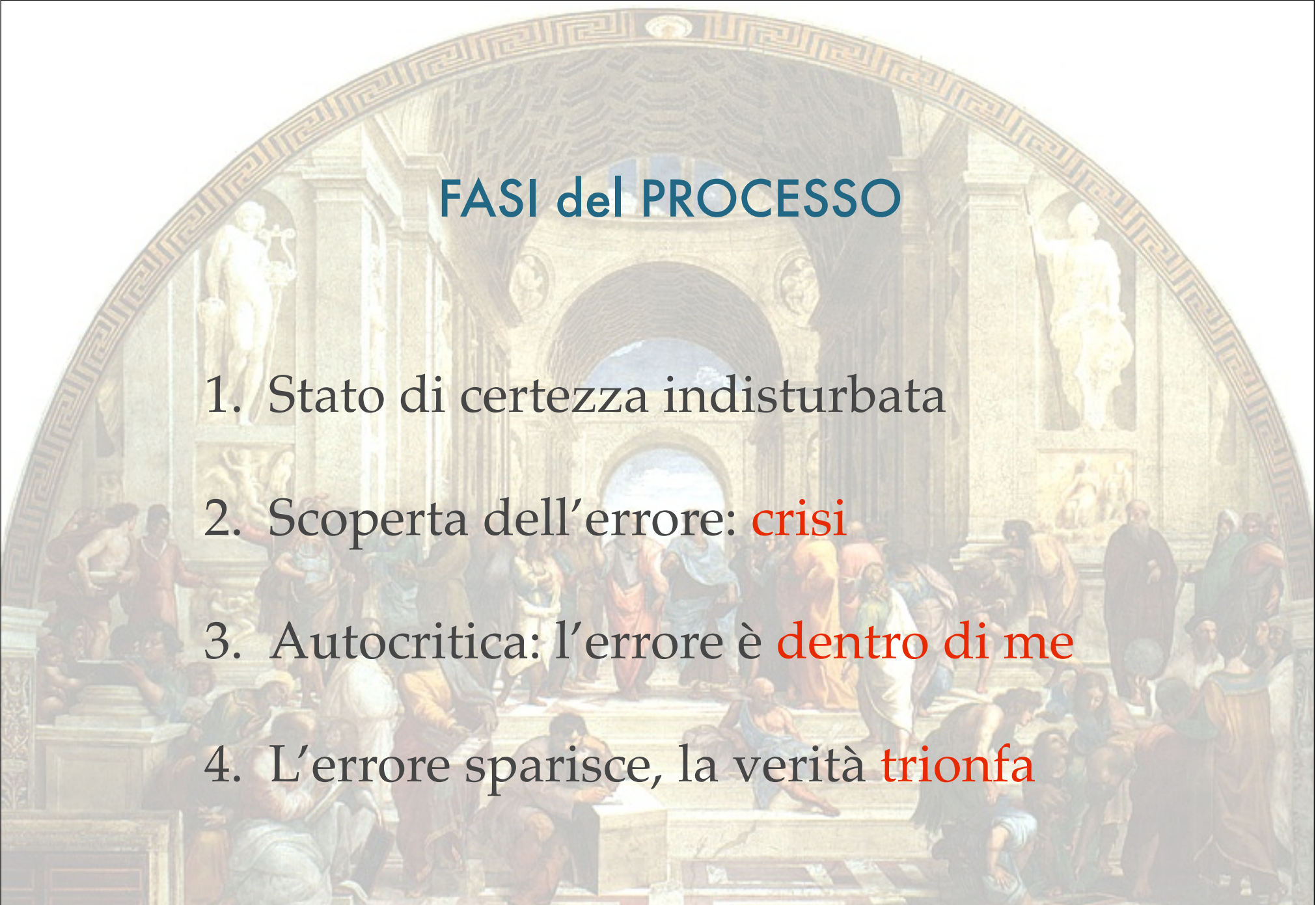
4 Il metodo

- Singolarità del metodo matematico
- Piú antico del metodo sperimentale: **Euclide** (?)
Lo stile è simile: Enunciato + dimostrazione
- Il processo avviene nella testa del matematico
- Lo scopo è raggiungere la **certezza**, piú precisamente l'**unanimità**



- In fisica, ad esempio, il processo è diverso
- L'errore sta **a metà strada** fra scienziato e natura
- Una teoria non funziona: se ne prova una nuova
- Nessuna teoria è vera al 100%
- Teorie contraddittorie **coesistono**

- In matematica manca il termine di riferimento (la `natura') e tutto si basa sulla **sensazione di certezza** dei matematici (il cervello)
- L'incontro con l'errore è parte integrante del processo

The background of the slide is a reproduction of Raphael's fresco 'The School of Athens'. It depicts a group of ancient Greek philosophers in a grand, vaulted architectural setting. The figures are engaged in various intellectual activities: some are standing and gesturing, others are seated and writing or reading. The architecture features high arches, columns, and statues in niches, creating a sense of depth and grandeur. The overall tone is classical and scholarly.

FASI del PROCESSO

1. Stato di certezza indisturbata
2. Scoperta dell'errore: **crisi**
3. Autocritica: l'errore è **dentro di me**
4. L'errore sparisce, la verità **trionfa**

L. Wittgenstein (On Certainty, 1950)

Sono “sicuro” di avere un
cervello.

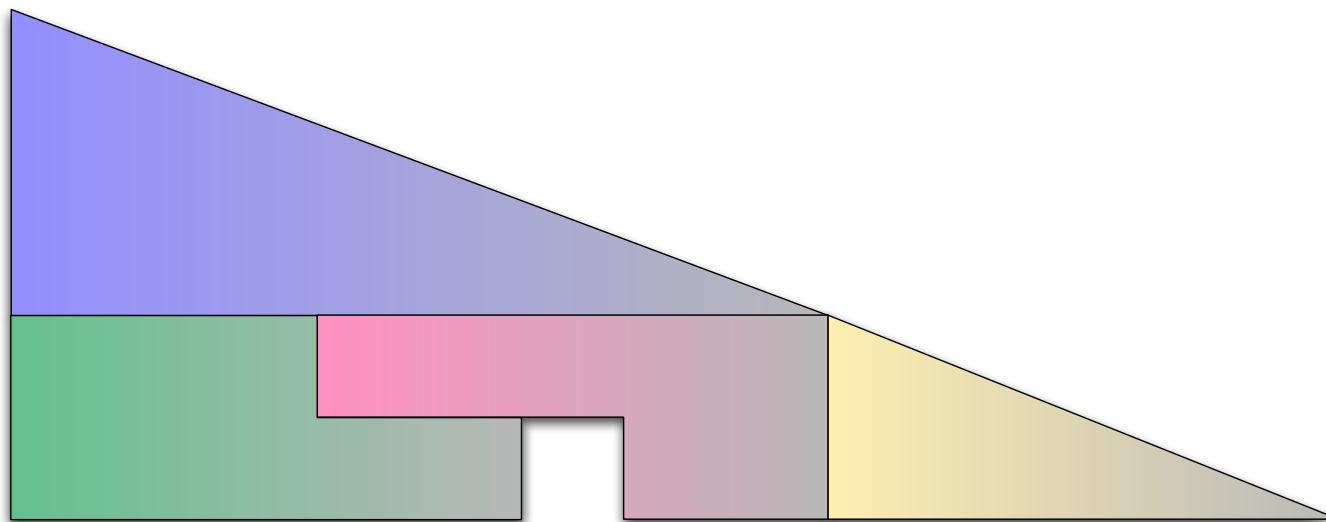
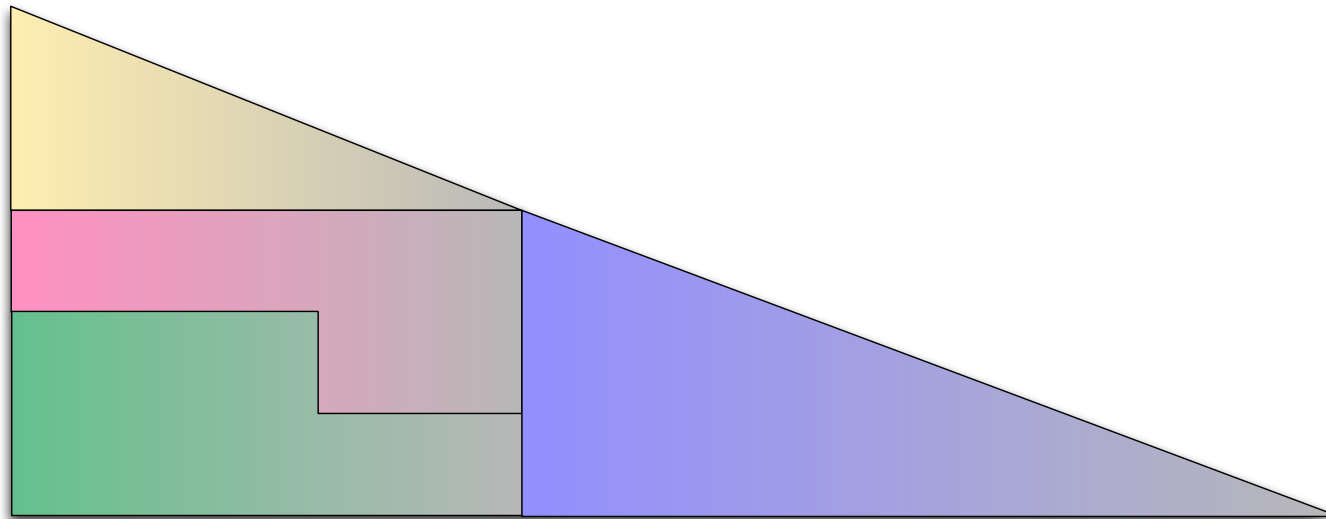
Come faccio a saperlo?



5 Errore e metodo

- Alla base del metodo c'è il superamento dell'errore
- L'errore `stava' nella descrizione inadeguata del problema...
- ...o negli strumenti inadeguati...
- Alcuni errori producono vere e proprie **crisi di crescita**

Dov'è l'errore?

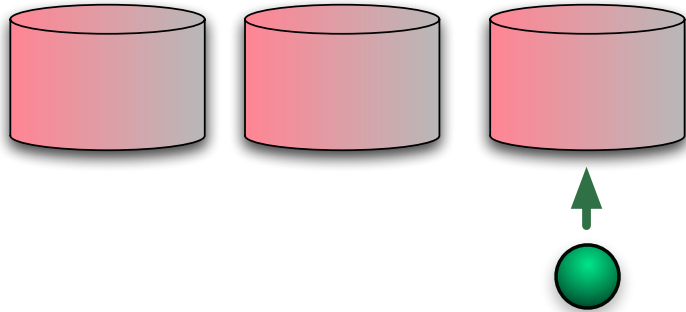


- Moltissimi esempi importanti
- $+1-1+1-1+1-1\dots = ?$
- Steiner e il problema isoperimetrico
- Problema di Dirichlet: la soluzione di Riemann e quella di Weierstrass

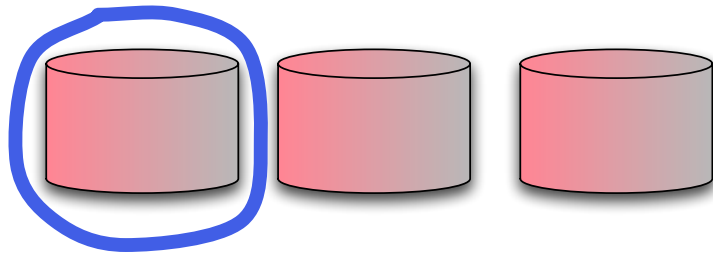
- Il paradosso di Russell portò ad una rivoluzione nei fondamenti della matematica
- `L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi'

- La probabilità è un terreno fertile per l'errore
- Difficoltà del cervello a valutare lo 'spazio degli eventi'
- Esempio: il problema di Monty Hall

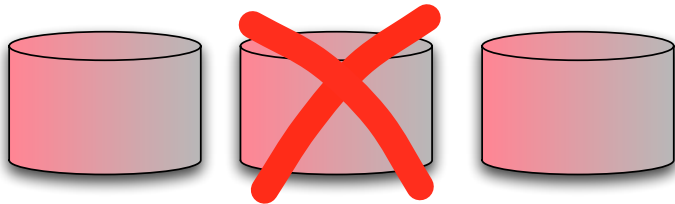




Tre scatole; solo una
contiene un premio



Il concorrente ne
sceglie una a caso...



...e il presentatore apre
una scatola vuota fra le
altre due

A questo punto il concorrente può cambiare scatola, se vuole.

Gli conviene?

Tre ragionamenti

-  Ogni scatola ha probabilità $1/3$ di essere quella buona. L'apertura di una scatola non cambia nulla.
-  All'inizio ho una probabilità su tre di vincere, e se non cambio resta la stessa. Ora ci sono solo due scatole e se scegliessi a caso adesso avrei probabilità $1/2$ di vincere. Mi conviene cambiare così la mia probabilità sale a $1/2$.
-  La scatola scelta all'inizio è vuota 2 volte su 3. Adesso, la scatola ancora chiusa è vuota solo 1 volta su 3, e cioè se io avevo scelto quella buona. Mi conviene cambiare così la mia probabilità sale a $2/3$!

Qual è quello **giusto**?

- “Sperimentalmente” (e rigorosamente) il terzo ragionamento è corretto
- Difficoltà del cervello a visualizzare in modo corretto la totalità dei casi favorevoli/sfavorevoli

Pausa

- A che serve la **Dimostrazione**?
- A questo punto dovrebbe essere chiaro
- La sensazione di certezza deve appoggiarsi ad un metodo piú solido, riproducibile e verificabile da altri

6 Errori in corso

- Il processo di verifica dei fondamenti continua
- Nuovi paradossi vengono discussi, e gli strumenti si affinano
- L'uso innocente del linguaggio però ha ancora validità

Il paradosso del mentitore (Epimenide, Russell...)

Il proprietario di un ponte fa dire e giurare a chi passa per quale motivo vuol passare. I mentitori vengono impiccati su due piedi. Un giorno arriva un uomo che dichiara: "Sono venuto per farmi impiccare da voi!"

"Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre" (Don Quijote II-51)

- Non c'è unanimità su come risolverlo
- Se ammettiamo frasi che parlano di sé stesse rischiamo l'assurdo
- Tarski: basta proibirle!

Il paradosso del compito a sorpresa

Il professore dichiara: la prossima settimana faremo un compito in classe a sorpresa.

Un ragazzo gli risponde: sabato non può essere perché non sarebbe una sorpresa; venerdì non può essere, visto che abbiamo escluso sabato e arrivati a venerdì non sarebbe più una sorpresa; eccetera.

Ma il mercoledì seguente.....

Vero o falso?

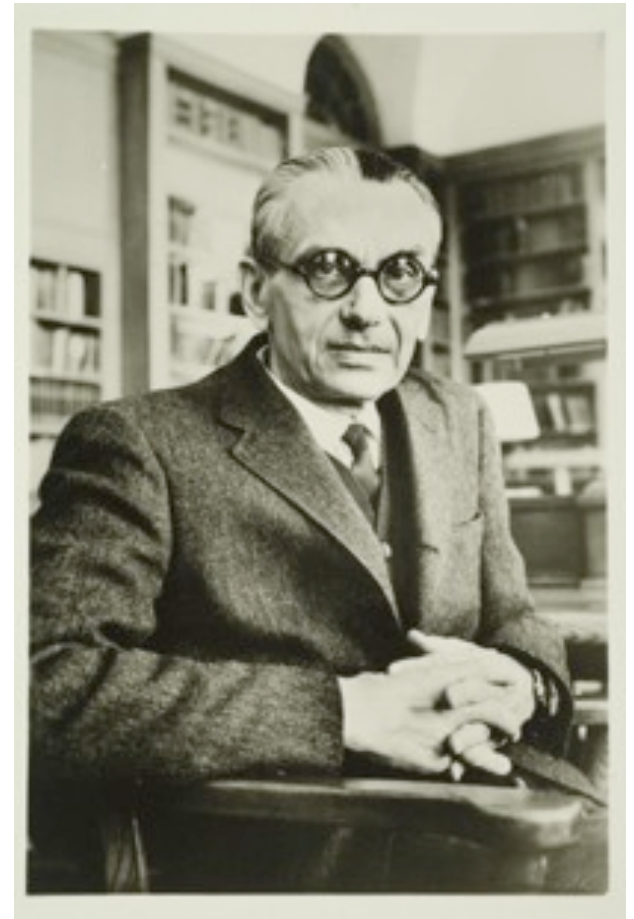
Alice ha un amante e suo marito Bob non sa nulla. Un giorno Alice scrive una lettera al suo amante: "Non preoccuparti Charles, Bob non sa niente della nostra storia!"

Bob intercetta la lettera e la legge.

La frase scritta nella lettera è vera o falsa? Se Bob ci crede è falsa, se non ci crede è vera...

7 Incompletezza

- 1931: Gödel dimostra l'**incompletezza** della matematica (aritmetica)
- Esistono affermazioni che non possiamo dimostrare vere né false
- Si tratta di **verità indecidibili**
- Il metodo ha dei limiti



- Il matematico professionista considera questo tipo di problemi artificiale
- Di Biase, Stokolos, Svennson, Weiss 2006: la congettura di Rudin (strong sharpness statement) è **indecidibile**
- Possiamo dire che il problema è **risolto**?

- Per la pratica quotidiana del matematico, il metodo si rivela estremamente solido
- Lo studio continuo dei fondamenti **rafforza** il metodo e ne delinea il campo di applicazione

8 La verità matematica

- Basata sulla sensazione di certezza, ma quella del singolo non è sufficiente
- Un risultato è **vero** quando la comunità degli scienziati decide che è vero
- **Peer Review**: uno o più **referee anonimi** decidono per tutta la comunità
- Verità matematica come attività **sociale**



Un controllo “esterno” è
indispensabile: molti gli
esempi negativi



Il caso Castelnuevo - Enriques
- Severi (secondo Mumford)

- Il **Peer Review** resta il metodo più affidabile per stabilire la verità matematica
- Permette di valutare anche la qualità dei risultati

Difetti del peer review

- Lentezza (mesi / anni)
- Premia le opinioni dominanti
- L'anonimato, male necessario
- Non affidabile al 100%

9 Nuove sfide

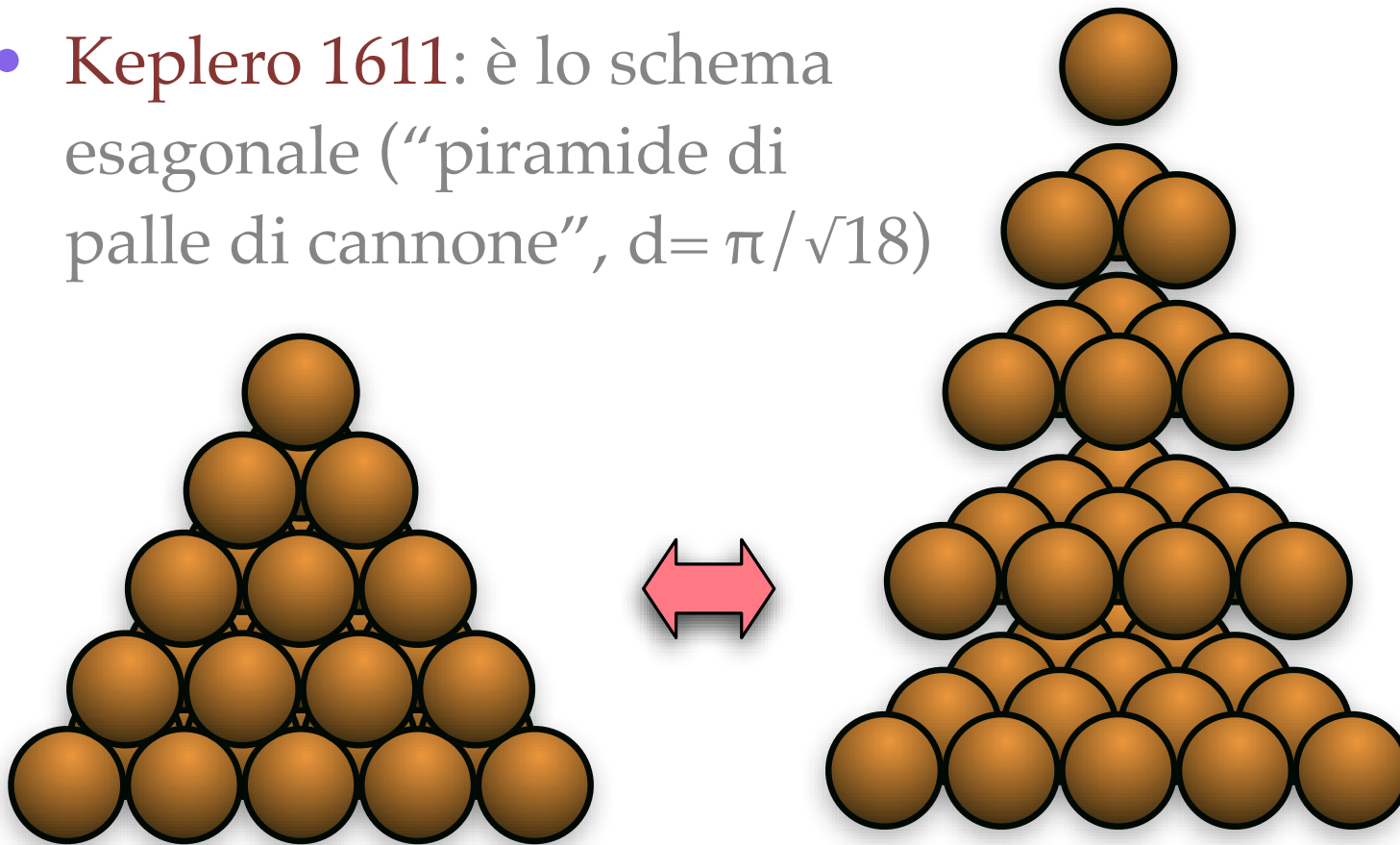
- La storia si ripete
- Fenomeni nuovi che mettono in crisi il funzionamento del metodo e richiedono nuove soluzioni

Alcuni problemi nuovi

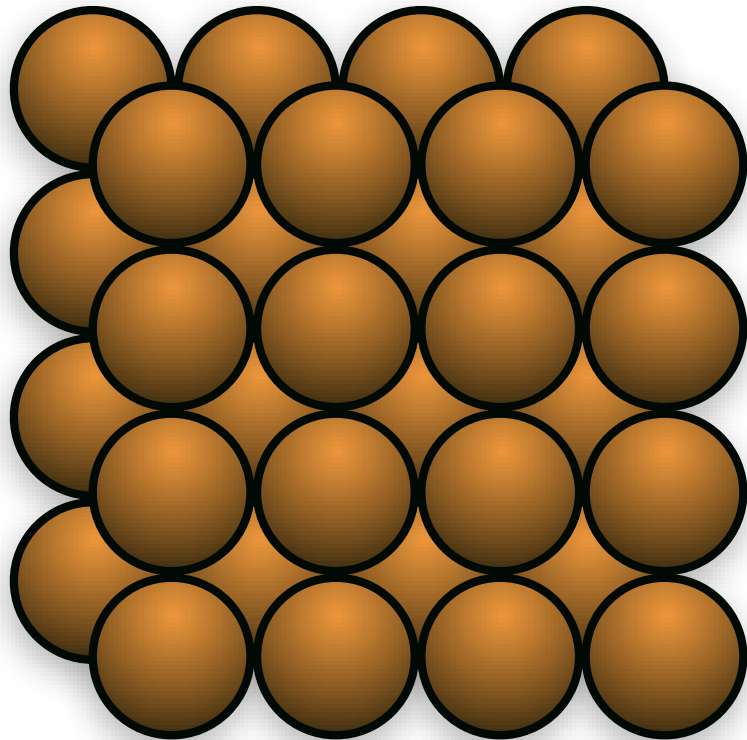
- Complessità crescente delle dimostrazioni
- Come valutare l'uso di software (e deve essere open source)?
- Il problema del copyright

La congettura di Keplero (o Hilbert XVIII)

- Qual è il modo più denso di impacchettare delle sfere nello spazio?
- **Keplero 1611**: è lo schema esagonale (“piramide di palle di cannone”, $d = \pi / \sqrt{18}$)



- Lo schema cubico dà la stessa densità



- Nel 1998 Thomas Hales propone una dimostrazione (300 pagine, 40000 linee di software)
- Divisione in numerosi casi controllati con l'aiuto del computer
- Gli *Annals of Mathematics* chiedono a 12 referee di valutare il risultato
- Nel 2004 i referee si arrendono...



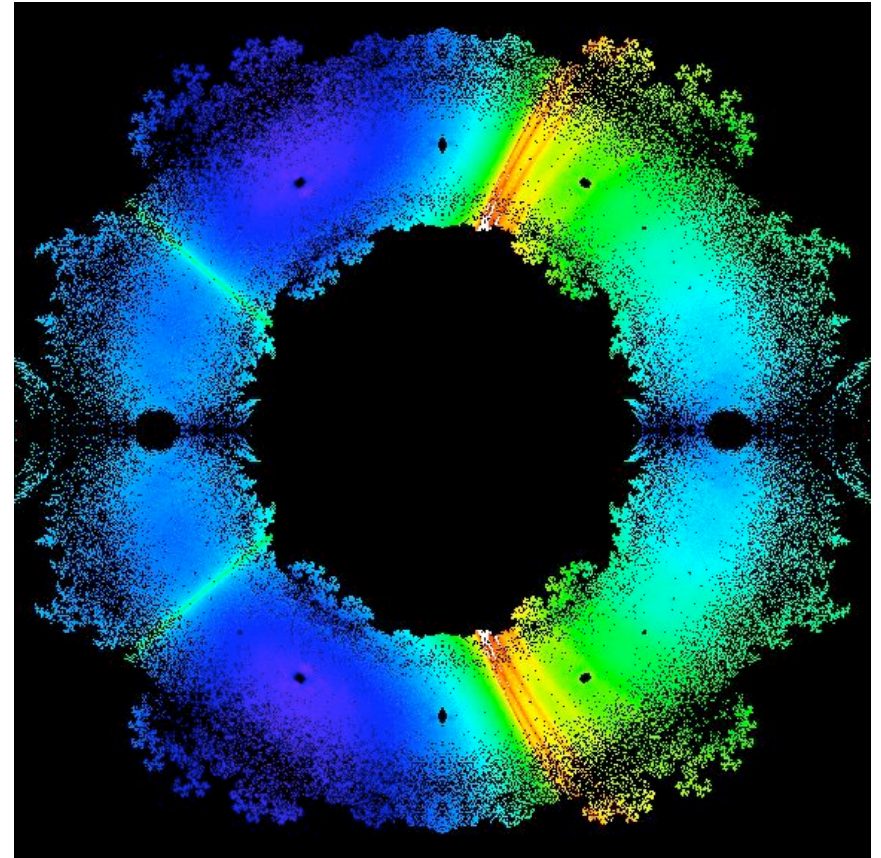
- Il lavoro è stato pubblicato nel 2005 con la dicitura `corretto al 99 %'
- Cosa ne è del metodo e della **verità matematica**?
- Gli *Annals* hanno modificato le regole: le dimostrazioni computer-assisted sono accettate ma di serie B
- Casi isolati, ma c'è un problema

10 Alcune soluzioni

- Un esperimento riuscito: arXiv
- Risolve alcuni problemi: copyright, diffusione risultati
- Ma il problema del peer review?

- **Verifica automatica della dimostrazione.**
Molti esperimenti
- Il progetto QED, COQ e il linguaggio
Gallina, HOL, PhoX, Lego, Isabelle, Mizar
- Per ora siamo lontani dall'uso quotidiano
- 2004: verificato il Teorema dei 4 colori
- 2005: Teorema della curva di Jordan
- 2007: Teorema dei residui di Cauchy

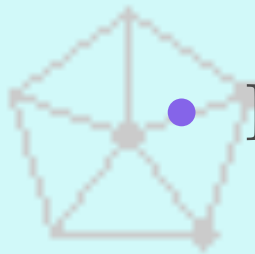
- Possiamo fidarci del computer?
- Software contiene in media 1 bug / 100 linee
- HOL occupa 500 linee
- Probabilità di errore già inferiore a quello di una dimostrazione umana



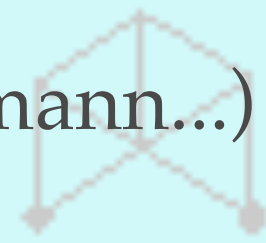
- In futuro l'affidabilità aumenterà ulteriormente
- Sarà richiesta la certificazione automatica dei risultati?
- Passaggio successivo: dimostrazione automatica e formulazione di congetture
- Cfr. AMS Notices, Dicembre 2008



- Il concetto di **matematica sperimentale**



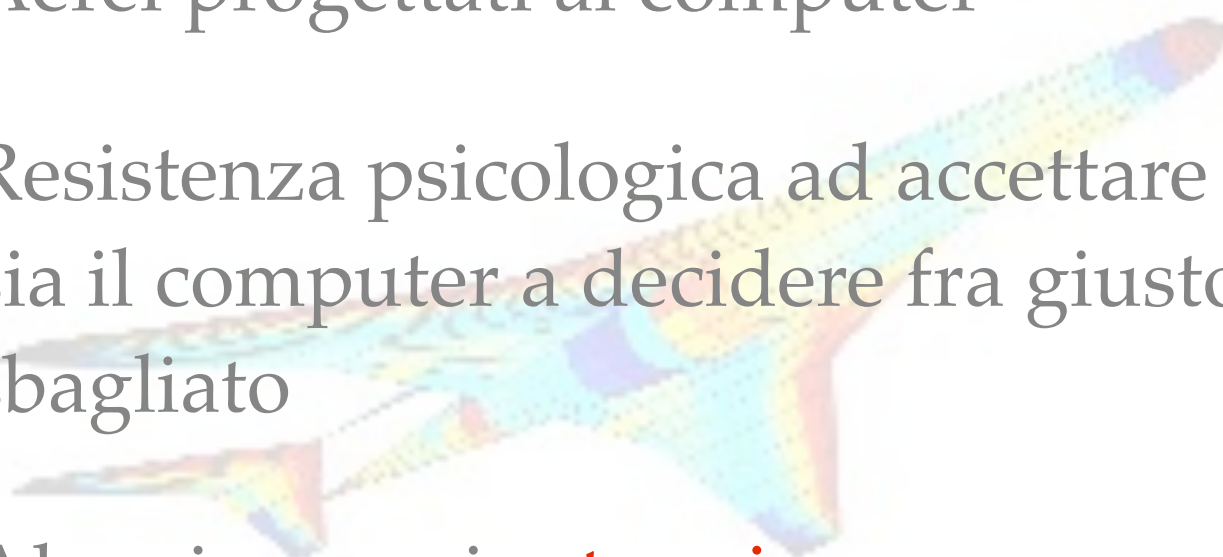
- Praticata 'da sempre' (Gauss, Riemann...)

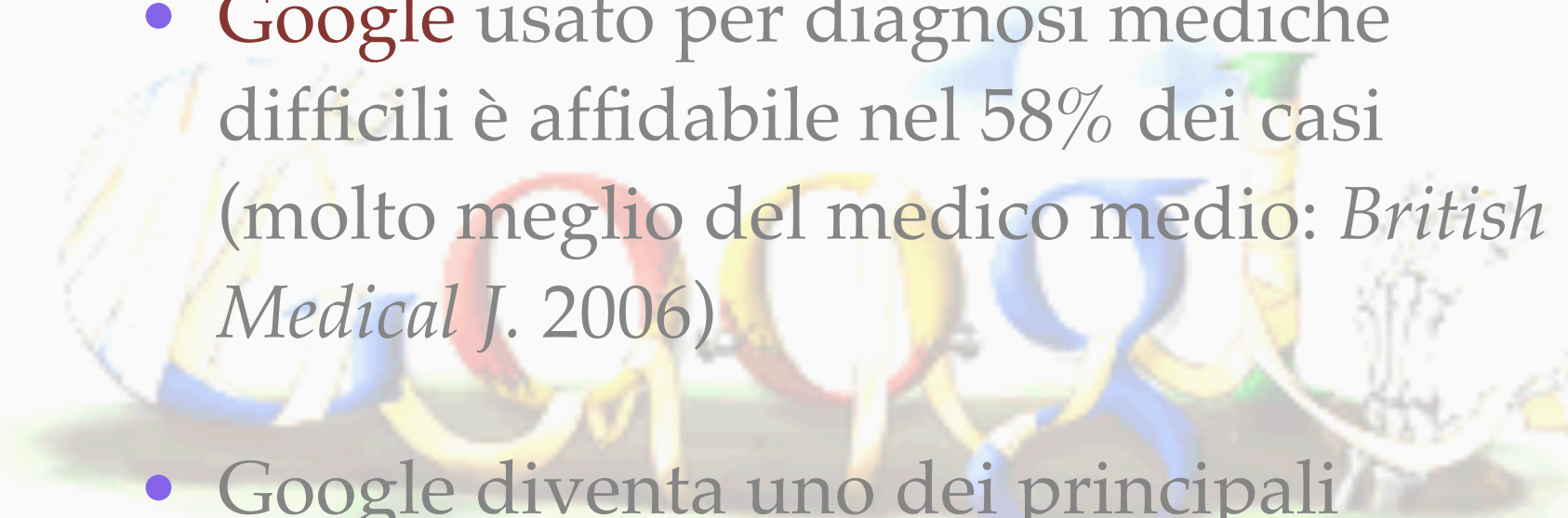


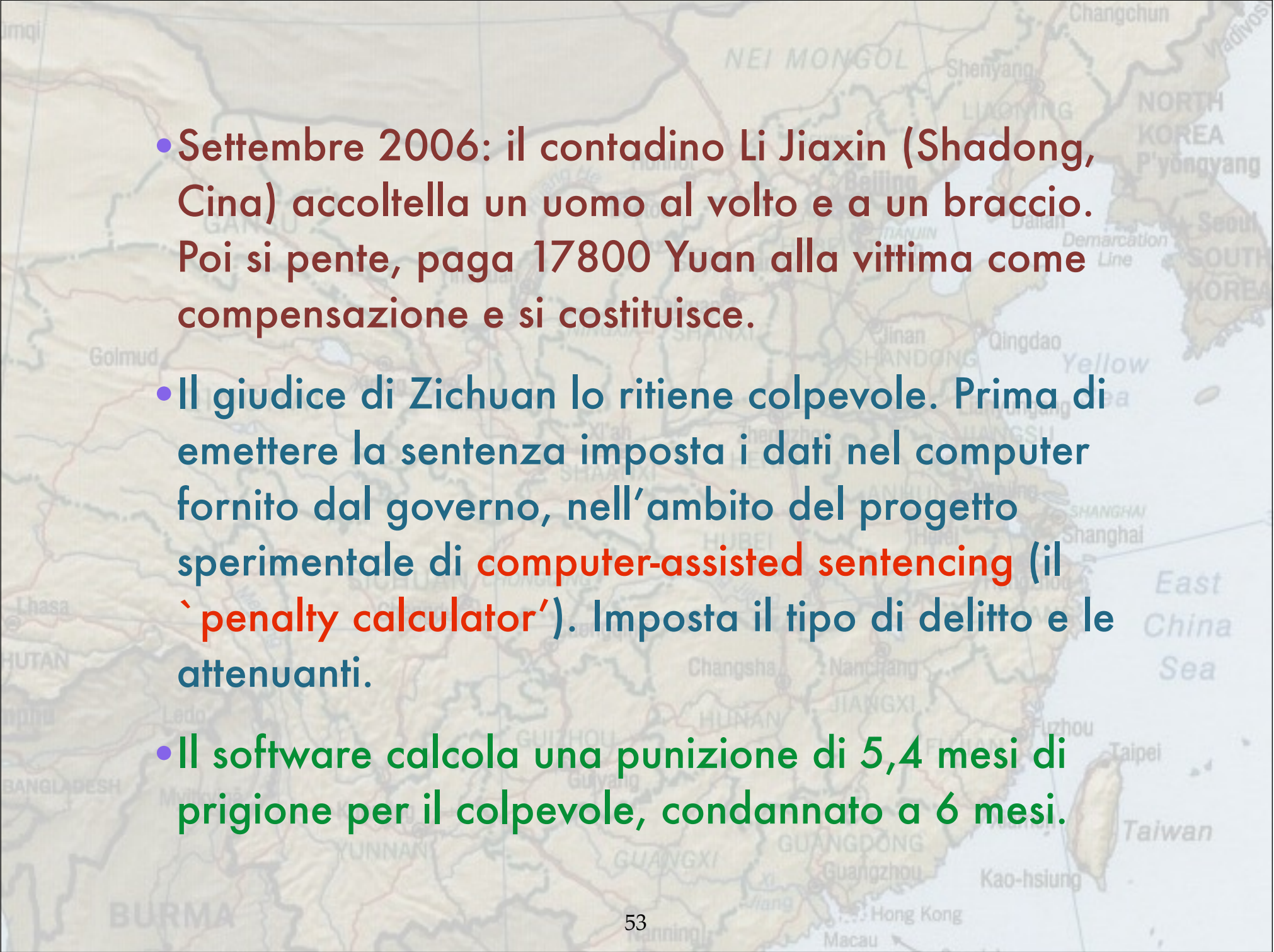
- In evoluzione: scoperta di nuovi fenomeni, quasi-dimostrazioni



- Aerei progettati al computer
- Resistenza psicologica ad accettare che sia il computer a decidere fra giusto e sbagliato
- Alcuni esempi **estremi**



- 
- **Google** usato per diagnosi mediche difficili è affidabile nel 58% dei casi (molto meglio del medico medio: *British Medical J.* 2006)
 - Google diventa uno dei principali strumenti di diagnosi...

- 
- Settembre 2006: il contadino Li Jiaxin (Shadong, Cina) accoltella un uomo al volto e a un braccio. Poi si pente, paga 17800 Yuan alla vittima come compensazione e si costituisce.
 - Il giudice di Zichuan lo ritiene colpevole. Prima di emettere la sentenza imposta i dati nel computer fornito dal governo, nell'ambito del progetto sperimentale di **computer-assisted sentencing** (il **'penalty calculator'**). Imposta il tipo di delitto e le attenuanti.
 - Il software calcola una punizione di 5,4 mesi di prigione per il colpevole, condannato a 6 mesi.