

1° ESONERO DI ALGEBRA
(Studenti di Informatica — canale D'Andrea)
7 novembre 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

-
- L'iniziale del mio cognome è compresa tra A e L.
-

1. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi $H \subset G$ siano sottogruppi:

- $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = \{0, \pm 2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \dots\}$;
- $G = S_6$, $H = \{\text{id}, (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6), (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4), (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)\}$;
- $G = \mathbb{Z}_{13}^\times$, $H = \{[1], [5], [8], [12]\}$.

e quali di tali sottogruppi siano ciclici.

2. Decidere se i seguenti elementi siano moltiplicativamente invertibili in \mathbb{Z}_{105}^\times . In caso affermativo, calcolarne inverso e ordine; altrimenti, spiegare perché non siano invertibili.

- $[91]$;
- $[43]$;
- $[57]$.

3. Dire se i seguenti elementi x, y siano coniugati nel gruppo G :

- $x = (1\ 2)(3\ 4), y = (1\ 3)(2\ 4), G = A_5$;
- $x = (1\ 3\ 5)(2\ 4), y = (1\ 4)(2\ 5\ 3), G = S_5$;
- $x = s, y = sr, G = D_6$ [qui s indica una simmetria e r la rotazione di 60 gradi];
- $x = [2], y = [9], G = \mathbb{Z}_{11}^\times$.

4. Date le permutazioni $\sigma = (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 7\ 6), \tau = (3\ 4\ 8\ 5) \in S_8$, calcolare $(\sigma\tau)^{20}$. Qual è l'ordine di $\sigma, \tau, \sigma\tau$? Sono permutazioni pari o dispari?

5. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 4x \equiv 6 \pmod{14} \\ 15x \equiv 10 \pmod{25} \end{cases}$$

Tutte le risposte vanno giustificate. Risposte prive di giustificazione non verranno valutate.