

Algebra
Proff. A. D'Andrea
Prova di esonero

7 NOVEMBRE 2018

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.

Esercizio 1. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di D_6 sono sottogruppi (r è la rotazione di 60 gradi, mentre s è una simmetria)

- $\{\text{id}, s, r, sr\}$
- $\{\text{id}, s, r^3, sr^3\}$
- $\{\text{id}, r, r^4, sr, sr^4\}$
- $\{\text{id}, s, sr^2, sr^4, r^3\}$

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 15x \equiv 23 \pmod{37} \\ 37x \equiv 15 \pmod{22}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Quanti elementi di ordine 2 ci sono nel prodotto diretto $S_3 \times D_4$?

Esercizio 4. Dire quali dei seguenti elementi siano invertibili in \mathbb{Z}_{1001} , calcolandone l'inverso in caso affermativo, e spiegando perché non lo siano in caso negativo:

- [155]
- [222]
- [329]

Esercizio 5. Dopo aver mostrato che $H = \{\text{id}, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$ è un sottogruppo di S_4 , calcolare laterali sinistri e destri di H in S_4 e decidere se H sia normale.

Esercizio 6. Decidere se i seguenti elementi siano coniugati tra loro:

- [1] e [14] in $(\mathbb{Z}_{15}, +)$
- (123) e (132) in A_3
- (123) e (132) in A_5
- (123) e (132)(45) in A_5

Esercizio 7. Quanti elementi possiede il gruppo \mathbb{Z}_{335}^\times ? Che ordine ha, in questo gruppo, l'elemento [11]?

Esercizio 8. Dire con quanti e quali elementi commuta:

- l'elemento sr nel gruppo D_6
- l'elemento (12345) nel gruppo S_5 .

Esercizio 9. Quanti coniugati ha (123)(456) in S_6 ? E in A_6 ?

Esercizio 10. Dire se le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi:

- $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), \quad f(x) = x + 2$
- $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \mathbb{R}^\times, \quad f(x) = 2x$
- $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \mathbb{R}^\times, \quad f(x) = 2^x$
- $f : C_6 \rightarrow C_6, \quad f(x) = x^{-1}$
- $f : D_6 \rightarrow D_6, \quad f(x) = x^3$