2^o **SCRITTO DI ALGEBRA**
(Studenti di Informatica — canale D'Andrea)
30 gennaio 2019

Cognome e Nome: Matricola:

---

1. – Calcolare l'ordine di $\overline{13}$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_{43}^\times$;
– calcolare l'ordine di $\overline{12}$ nel gruppo additivo $\mathbb{Z}_{42}$.

Soluzione:

– L'ordine di $\overline{13}$ in $\mathbb{Z}_{43}^\times$ è il più piccolo intero $d > 0$ tale che $13^d \equiv 1 \mod 43$. Poiché $|\mathbb{Z}_{43}^\times| = \phi(43) = 42$, sappiamo che d deve essere un divisore di 42, quindi uno dei numeri $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$.
Con qualche facile conto, si ottiene:
  * $13^2 = 169 \equiv -3 \mod 43$;
  * $13^3 = 13 \cdot 13^2 \equiv 13 \cdot (-3) = -39 \equiv 4 \mod 43$;
  * $13^6 = (13^3)^2 \equiv 4^2 = 16 \mod 43$;
  * $13^7 = 13 \cdot (13^6) \equiv 13 \cdot 16 = 208 \equiv -7 \mod 43$;
  * $13^{14} = (13^7)^2 \equiv (-7)^2 = 49 \equiv 6 \mod 43$;
  * $13^{21} = 13^7 \cdot 13^{14} \equiv (-7) \cdot 6 = -42 \equiv 1 \mod 43$.

In conclusione, l'ordine di $\overline{13}$ è 21.

– L'ordine di $\overline{12}$ in $\mathbb{Z}_{42}$ è il più piccolo intero $d > 0$ tale che $12 \cdot d$ sia multiplo di 42. Poiché $\mathrm{MCD}(12, 42) = 6$ e quindi $\mathrm{mcm}(12, 42) = 12 \cdot 42/6 = 84$, concludiamo che $d = 84/12 = 7$ è tale valore minimo. L'ordine è quindi 7.

2. Date le permutazioni $\sigma = (1\,2\,3\,4)$, $\tau = (1\,3\,5)(2\,6)$ in S_6,
- calcolare $\sigma\tau$ e $\tau\sigma$;
- dire se $\sigma\tau$ e $\tau\sigma$ siano coniugate in A_6.

Soluzione:
- Si calcola facilmente che $\sigma\tau = (1\,4)(2\,6\,3\,5)$ e $\tau\sigma = (1\,6\,2\,5)(3\,4)$.
- Lo sono sicuramente in S_6, perché possiedono la stessa struttura ciclica. Lo sono anche in A_6 poiché, come visto a lezione, la classe coniugata rimane la stessa dal momento che $(1\,4)(2\,6\,3\,5)$ commuta con almeno una permutazione dispari — ad esempio, $(1\,4)$.

3. Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\3\\2\end{pmatrix}\right)$$

e

$$V = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\right\},$$

calcolare le dimensioni di $U, V, U + V$.

Soluzione:

– Chiamati v_1, v_2, v_3 i tre vettori dati, si vede che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, perché non uno multiplo dell'altro, mentre $v_3 = 3v_2 - 2v_1$. Pertanto v_1, v_2 sono una base di U, che deve avere dimensione 2.
– Il sottospazio vettoriale V è invece il nucleo dell'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$ che ha rango 1. Pertanto $\dim V = \dim\ker T = 4 - \dim \mathrm{Im}\, T = 3$.
– Per quanto riguarda $U+V$, il vettore v_2 non soddisfa l'equazione $x_1+x_2+x_3+3x_4 = 0$ e quindi non appartiene a V; ma allora $U+V$ ha dimensione strettamente maggiore di V. Essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, ha dimensione maggiore di 3 ma ≤ 4, e quindi ha dimensione 4. In altre parole, $U + V = \mathbb{R}^4$.

4. La matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

– Mostrare che -3 è un autovalore di T;
– decidere se T sia diagonalizzabile;
– scrivere basi degli autospazi di T.

Soluzione:

– L'applicazione lineare $T + 3\,\mathrm{id}$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

che ha evidentemente determinante nullo, essendo le sue righe una multipla dell'altra. Più precisamente, ha rango 1, e quindi non solo -3 è un autovalore di T, ma la sua molteplicità geometrica è 2.

– Il polinomio caratteristico di T è

$$\det \begin{pmatrix} 0-x & -1 & 2 \\ -3 & -2-x & -2 \\ 6 & -2 & 1-x \end{pmatrix} = -(x+3)^2(x-5).$$

e gli autovalori di T sono quindi -3, di molteplicità algebrica 2, e 5, di molteplicità algebrica 1. Di conseguenza la molteplicità geometrica di 5 è anch'essa 1, e la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è $1+2=3=\dim \mathbb{R}^3$. L'applicazione T è quindi diagonalizzabile.

– Il 3-autospazio è il nucleo dell'applicazione di matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

e ha quindi equazione cartesiana $3x - y + 2z = 0$. Trattandosi di un sottospazio di dimensione 2, qualsiasi scelta di due vettori linearmente indipendenti ne produce una base. Ad esempio, $(1,3,0)^t$ e $(0,2,1)^t$.

Per quanto riguarda il 5-autospazio, dobbiamo trovare il nucleo, di dimensione 1, dell'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -3 & -7 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Con un po' di eliminazione di Gauss si arriva alla forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

e quindi una base del 5-autospazio è data, ad esempio, dal vettore $(1,-1,2)^t$.

Tutte le risposte vanno giustificate. Risposte prive di giustificazione non verranno valutate.