4^o **SCRITTO DI ALGEBRA**
(Studenti di Informatica — canale D'Andrea)
3 luglio 2019
Soluzioni

Cognome e Nome: Matricola:

---

1. – Calcolare il massimo comun divisore dei numeri 169 e 435, nonché la corrispondente identità di Bézout.
– Dire se $\overline{435} \in \mathbb{Z}_{169}$ abbia inverso moltiplicativo ed eventualmente calcolarlo.

Soluzione: Se si tratta di calcolare il solo massimo comun divisore, è sufficiente fattorizzare i numeri in primi:

$$169 = 13^2, \qquad 435 = 3 \cdot 5 \cdot 29,$$

per scoprire che sono primi tra loro e che quindi 435 è moltiplicativamente invertibile modulo 169. Il calcolo dell'identità di Bézout richiede invece l'esecuzione dell'algoritmo euclideo. Le divisioni con resto:

$$\begin{aligned} 435 &= 2 \cdot 169 + 97 \\ 169 &= 1 \cdot 97 + 72 \\ 97 &= 1 \cdot 72 + 25 \\ 72 &= 2 \cdot 25 + 22 \\ 25 &= 1 \cdot 22 + 3 \\ 22 &= 7 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

mostrano ancora una volta che $\mathrm{MCD}(169, 435) = 1$. Procedendo a ritroso, si ottiene che

$$\begin{aligned} 1 &= 22 - 7 \cdot 3 \\ &= 22 - 7(25 - 22) & &= 8 \cdot 22 - 7 \cdot 25 \\ &= 8(72 - 2 \cdot 25) - 7 \cdot 25 & &= 8 \cdot 72 - 23 \cdot 25 \\ &= 8 \cdot 72 - 23(97 - 72) & &= 31 \cdot 72 - 23 \cdot 97 \\ &= 31(169 - 97) - 23 \cdot 97 & &= 31 \cdot 169 - 54 \cdot 97 \\ &= 31 \cdot 169 - 54(435 - 2 \cdot 169) & &= 139 \cdot 169 - 54 \cdot 435. \end{aligned}$$

Si ha quindi $-54 \cdot 435 \equiv 1 \mod 169$, e l'inverso moltiplicativo di $\overline{435}$ in $\mathbb{Z}_{169}$ è pertanto $\overline{-54} = \overline{115}$.

2. Quanti elementi di S_5 hanno ordine 2?

Soluzione: L'ordine di una permutazione è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti. Di conseguenza, una permutazione ha ordine 2 esattamente quando è prodotto di trasposizioni disgiunte. In S_5, dobbiamo quindi contare, come abbiamo fatto più volte a lezione, trasposizioni e prodotti di due trasposizioni disgiunte: le prime sono $\binom{5}{2=10}$, mentre le seconde sono $\binom{5}{2}\binom{3}{2}/2! = 15$. In totale, S_5 possiede $10 + 15 = 25$ elementi di ordine 2.

3. Dire se l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
sia diagonalizzabile, calcolando anche equazioni cartesiane dei suoi autospazi.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di M si calcola moltiplicando gli elementi sulla diagonale principale di $M - x\,\mathrm{id}$, che è triangolare superiore. Si ottiene $(x-1)^2(x-2)^2$, e gli autovalori di T sono quindi 1 e 2, entrambi di molteplicità algebrica 2.

Per capire se T sia diagonalizzabile vanno quindi calcolate le molteplicità geometriche. La matrice
$$M - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 2, come si verifica con una rapida eliminazione di Gauss. La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è quindi $\dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rango}(M - \mathrm{id}) = 4 - 2 = 2$, e l'$1$-autospazio ha equazioni cartesiane, ad esempio, $x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0$. Allo stesso modo, la matrice
$$M - 2\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
ha rango 3.

La molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è quindi $\dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rango}(M - 2\,\mathrm{id}) = 4 - 3 = 1$, e il 2-autospazio ha equazioni cartesiane $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0, x_4 = 0$. Poiché la molteplicità geometrica di questo autovalore non coincide con la sua molteplicità algebrica, T non è diagonalizzabile.

4. Decidere quali delle seguenti applicazioni siano lineari e, quando lo sono, determinarne generatori dell'immagine.
- $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da $F(a, b, c, d) = a + 2b + 3c + 4d + 5$
- $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
- $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $H(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, (x_1 + 1)^2 - (x_1 - 1)^2)$.

Soluzione: Un'applicazione $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare esattamente quando si esprime per mezzo di espressioni lineari prive di termine noto nelle coordinate dell'argomento. A naso, F, G non sono quindi lineari.

Per convincercene, notiamo che $F(0, 0, 0, 0) = 5$, mentre un'applicazione lineare manda il vettore nullo nel vettore nullo. Per quanto riguarda G, osserviamo che $G(1, 0, 1) = 0 = G(0, 1, 1)$, mentre

$$G((1, 0, 1) + (0, 1, 1)) = G(1, 1, 2) = 1 + 1 - 4 = -2 \neq 0 = G(1, 0, 1) + G(0, 1, 1).$$

L'applicazione H è invece lineare, perché si riscrive come segue:

$$H(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 4x_1).$$

La sua immagine è generata linearmente, ad esempio, da $H(1, 0) = (1, 1, 4)$ e da $H(0, 1) = (1, -1, 0)$.

Tutte le risposte vanno giustificate. Risposte prive di giustificazione non verranno valutate.