1^o **SCRITTO DI ALGEBRA – SOLUZIONI**
(Studenti di Informatica — canale D'Andrea)
11 gennaio 2019

Cognome e Nome: Matricola:

---

1. Dire se i seguenti elementi x, y siano coniugati nel gruppo G.

– $x = (1\,2\,3)(4\,5\,6), y = (1\,3\,6), \qquad G = \mathrm{A}_6$;

– $x = r^3, y = sr, \qquad G = \mathrm{D}_6$;
[D_6 indica il gruppo diedrale dell'esagono, r è la rotazione di $60°$ e s è una simmetria che passa per due vertici opposti]

– $x = (\mathrm{id}, (1\,2)), y = ((1\,3), \mathrm{id}), \qquad G = \mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3$.
[$\times$ indica il prodotto diretto, nel quale le operazioni sono fatte componente per componente]

Soluzione:

– No. Elementi coniugati in A_6 lo sono anche in S_6, ma x, y non hanno la stessa struttura ciclica, quindi non sono coniugati in S_6.

– No. L'elemento r^3 commuta con le 6 rotazioni di S_6, e anche con s, in quanto $sr^3s{-}1 = r^{-3} = r^3$. Commutando con almeno $7 > |\,\mathrm{D}_6\,|/2$ elementi, deve essere centrale, e quindi è coniugato solo a se stesso.

– No. I coniugati di (a, b) sono della forma

$$(g, h)(a, b)(g, h)^{-1} = (gag^{-1}, hbh^{-1}).$$

In particolare, tutti i coniugati di $(\mathrm{id}, (1\,2))$ devono essere della forma $(\mathrm{id}, h(1\,2)h^{-1})$, e quindi $((1\,3), \mathrm{id})$ non può essere uno dei suoi coniugati.

2. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{Z}$ il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 6x \equiv a \mod 8 \\ 5x \equiv 13 \mod 17 \end{cases}$$

ammetta soluzioni.

Soluzione:

La seconda congruenza è equivalente a $x \equiv 6 \mod 17$. La prima, invece, ammette soluzioni solo quando $\mathrm{MCD}(6, 8) = 2$ divide a. Di conseguenza, se a è dispari, il sistema non ha soluzioni, mentre se a è pari, può essere riscritto come

$$\begin{cases} x \equiv -a/2 \mod 4 \\ x \equiv 6 \mod 17, \end{cases}$$

che ammette sempre soluzioni per il Teorema cinese dei resti.

In conclusione, il sistema dato ammette soluzioni esattamente quando a è pari.

3. Dire per quali valori del parametro reale k il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 1 \\ x + ky + kz = k \\ x + (k+1)y = k+2 \end{cases}$$

ammetta soluzioni.

Soluzione:

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni esattamente quando i ranghi delle due matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & k & k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & k & -1 & 1 \\ 1 & k & k & k \\ 1 & k+1 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

coincidono. La seconda matrice ha rango 3 per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ poiché il suo minore

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & k+1 & k+2 \end{pmatrix} &= 2k(k+2) + k^2 + (k+1) - (k + 2k(k+1) + k(k+2)) \\ &= 2k^2 + 4k + k^2 + k + 1 - k - 2k^2 - 2k - k^2 - 2k = 1 \end{aligned}$$

è sempre diverso da 0.

Si calcola facilmente

$$\det \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & k & k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} = -(k+1)^2,$$

pertanto la matrice dei coefficienti delle incognite ha rango 3 ogni qual volta $k \neq -1$, e il sistema in questo caso ammette soluzione (unica), mentre ha rango < 3 se $k = -1$, e per questo valore il sistema è incompatibile.

4. Decidere se l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile, calcolando equazioni cartesiane e dimensioni dei suoi autospazi.

Soluzione:

Con un po' di conti, si vede che il polinomio caratteristico di T è

$$\det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ -2 & -1-x & 2 \\ -1 & -1 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)^3.$$

Pertanto, l'unico autovalore di T è 1 e la sua molteplicità algebrica è 3.

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 si ottiene sottraendo da $3 = \dim \mathbb{R}^3$ il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & -1 \\ -2 & -1-1 & 2 \\ -1 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

che è sicuramente 1, poiché le sue colonne sono multiple una dell'altra. In conclusione, la molteplicità geometrica dell'autovalore 1, cioè la dimensione dell'1-autospazio, è 2, e una sua equazione cartesiana è ad esempio $x + y - z = 0$, come si ottiene leggendo la prima riga dell'ultima matrice scritta.

In particolare, poiché la molteplicità geometrica dell'unico autovalore è inferiore alla molteplicità algebrica, T non è diagonalizzabile.

Tutte le risposte vanno giustificate. Risposte prive di giustificazione non verranno valutate.