5^o **SCRITTO DI ALGEBRA**
(Studenti di Informatica — canale D'Andrea)
12 settembre 2019

Cognome e Nome: Matricola:

---

1. Dire per quali valori del parametro intero a il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \mod 4 \\ 5x \equiv a \mod 8 \end{cases}$$

ammetta soluzioni intere.

Soluzione: Moltiplicando la prima congruenza per 3 e la seconda per 5 si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 5a \mod 8. \end{cases}$$

La seconda congruenza ci dice che x è della forma $5a + 8k, k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella prima, si ottiene $5a \equiv 2 \mod 4$, cioè $a \equiv 2 \mod 4$. Affinché il sistema sia compatibile, deve quindi valere $a \equiv 2 \mod 4$.

Viceversa, se $a \equiv 2 \mod 4$, cioè $a = 2 + 4r, r \in \mathbb{Z}$, il sistema diventa

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 10 + 20r = 2 + 4r \mod 8. \end{cases}$$

Tuttavia, se $x \equiv 2 + 4r \mod 8$, allora $x \equiv 2 \mod 4$, e quindi la prima congruenza è conseguenza della seconda.

In conclusione, il sistema ha soluzione se e solo se a è della forma $2 + 4r, r \in \mathbb{Z}$, ed è equivalente alla singola congruenza $x \equiv 2 + 4r \mod 8$.

2. Quanti sono gli elementi di ordine 4 in A_6?

Soluzione: L'ordine di una permutazione è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti. Affinché una permutazione abbia ordine 4, deve quindi contenere almeno un 4-ciclo, insieme possibilmente a trasposizioni. Una permutazione pari con queste proprietà in A_6 è necessariamente il prodotto disgiunto di un singolo 4-ciclo con una singola trasposizione.

E' chiaro che la trasposizione è determinata dal 4-ciclo; è sufficiente quindi contare il numero di 4-cicli che si possono formare con 6 elementi da permutare. Le possibili scelte di 4 elementi da un insieme di 6 è $\binom{6}{4} = 15$. Una volta scelti questi 4 elementi, e scritto il più piccolo per primo, ognuna delle $3! = 6$ permutazioni degli altri 3 elementi produce un diverso 4-ciclo.

In conclusione, gli elementi cercati sono in totale $15 \cdot 6 = 90$.

3. Dire se l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile, calcolando anche equazioni cartesiane dei suoi autospazi.

Soluzione: Per trovare gli autovalori di T, calcoliamo il suo polinomio caratteristico. Abbiamo

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 2 & 4 & 6-x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ x & x & -x \end{pmatrix} = x \cdot \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dove nel primo passaggio abbiamo sommato alla terza riga la somma delle altre due, e nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la linearità nella terza riga. Ora, sommando alla prima e alla seconda colonna la terza, e prendendo poi lo sviluppo di Laplace lungo la terza riga, si ottiene

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4-x & 5 & 3 \\ 4 & 5-x & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -((4-x)(5-x)-20) = -x^2+9x.$$

Pertanto, il polinomio caratteristico è $-x^3+9x^2 = -x^2(x-9)$ e gli autovalori sono 0, di molteplicità algebrica 2, e 9, di molteplicità algebrica 1. Automaticamente, l'autovalore 9 ha molteplicità geometrica 1. Per quanto riguarda invece la molteplicità geometrica dell'autovalore 0, notiamo che la matrice $M - 0\,\mathrm{id} = M$ ha rango 1 e quindi la molteplicità geometrica è $\dim \mathbb{R}^3 - 1 = 2$.

La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori coincide con la dimensione dello spazio vettoriale su cui l'endomorfismo T agisce, e questo garantisce la sua diagonalizzabilità.

Calcoliamo ora le equazioni degli autospazi. Lo 0-autospazio è il sottospazio vettoriale di dimensione 2 nucleo dell'endomorfismo di matrice

$$M - 0\,\mathrm{id} = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

La sua equazione cartesiana è quindi, ad esempio, $x+2y+3z=0$.

Il 9-autospazio è invece una retta, ed è il nucleo di

$$M - 9\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Una retta in $\mathbb{R}^3$ è individuata da una coppia (linearmente indipendente) di equazioni lineari. Scegliendo due righe linearmente indipendenti della matrice appena scritta, si ottiene, ad esempio,

$$\begin{cases} x-7y+3z=0 \\ 2x+4y-3z=0. \end{cases}$$

4. Quanti sono i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ che contengono il vettore $(1, 3, -4)$?

Soluzione: oltre ad $\mathbb{R}^3$ stesso, stiamo parlando di tutti gli infiniti piani che passano per l'origine e per $(1, 3, -4)$.