3^o **SCRITTO DI ALGEBRA**
(Studenti di Informatica — canale D'Andrea)
14 giugno 2019

Cognome e Nome: Matricola:

---

1. – Calcolare il massimo comun divisore dei numeri 675 e 435, nonché la corrispondente identità di Bézout.
– Dire se l'inverso di $\overline{435}$ nel gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{675}, +)$ esista ed eventualmente calcolarlo.

Soluzione:
– Procediamo con l'algoritmo euclideo. Si ottiene

$$\begin{aligned} 675 &= 1 \cdot 435 + 240 \\ 435 &= 1 \cdot 240 + 195 \\ 240 &= 1 \cdot 195 + 45 \\ 195 &= 4 \cdot 45 + 15 \\ 45 &= 3 \cdot 15 + 0, \end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{MCD}(675, 435) = 15$.
Per quanto riguarda l'identità di Bézout — **che esprime il MCD di due numeri come somma di loro multipli** — è sufficiente procedere a ritroso, ottenendo

$$\begin{aligned} 15 &= 1 \cdot 195 - 4 \cdot 45 \\ &= 1 \cdot 195 - 4(240 - 195) = 5 \cdot 195 - 4 \cdot 240 \\ &= 5(435 - 240) - 4 \cdot 240 = 5 \cdot 435 - 9 \cdot 240 \\ &= 5 \cdot 435 - 9(675 - 435) = 14 \cdot 435 - 9 \cdot 675. \end{aligned}$$

– In un gruppo, tutti gli elementi hanno inverso. Ad esempio, in questo caso, l'inverso di $\overline{435}$ in $(\mathbb{Z}_{675}, +)$ è $\overline{240}$.

2. Quanti elementi di A_6 commutano con la permutazione $(1\,6)(2\,5)$?

Soluzione:

Il numero di coniugati di $g \in G$ coincide sempre con l'indice del centralizzatore di g in G. E' facile calcolare il numero dei coniugati di $g = (1\,6)(2\,5)$ nel gruppo simmetrico S_6 poiché nei gruppi simmetrici due elementi sono coniugati se e solo se hanno la stessa struttura ciclica. I coniugati di g in S_6 sono allora tutte e sole le permutazioni che si scrivono come prodotto di due trasposizioni disgiunte. Facendo il conto come fatto più volte a lezione si ottiene $\binom{6}{2}\binom{4}{2}/2 = 15 \cdot 6/2 = 45$. L'elemento g commuta quindi con esattamente $|\,\mathrm{S}_6\,|/45 = 720/45 = 16$ elementi di S_6.

Poiché tra tali elementi vi è sicuramente $(1\,6)$, g commuta anche con permutazioni dispari; pertanto nel centralizzatore di g in S_6 vi sono 8 permutazioni pari e 8 dispari. In conclusione, g commuta con esattamente 8 elementi di A_6. Se per caso vi interessasse sapere quali siano, sono i seguenti:

- id
- $(1\,6)(2\,5)$
- $(1\,2)(5\,6)$
- $(1\,5)(2\,6)$
- $(1\,6)(3\,4)$
- $(2\,5)(3\,4)$
- $(1\,2\,6\,5)(3\,4)$
- $(1\,5\,6\,2)(3\,4)$

3. Mostrare che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ammette 4 come suo autovalore, calcolandone inoltre la molteplicità geometrica.

Soluzione:

Si vede immediatamente che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi 4 è un autovalore di M. Per calcolarne la molteplicità algebrica, che è 1, è sufficiente far vedere che la matrice $M - 4\,\mathrm{id}$ ha rango 3. Questo si fa con un'eliminazione di Gauss, ma richiede qualche conto.

Un modo più indiretto è quello di notare che la matrice M ha rango 1, quindi ammette anche l'autovalore 0 che ha molteplicità geometrica 3, e quindi molteplicità algebrica almeno 3. Poiché la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di M è al più 4, la molteplicità dell'autovalore 4 non può superare 1.

4. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi siano sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

- L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$.
- L'insieme delle soluzioni (x, y, z) dell'equazione $x + y + z = 3$.
- L'insieme delle soluzioni (a, b, c) dell'equazione $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

Soluzione:

- L'insieme delle combinazioni lineari di qualsiasi sottoinsieme di vettori è sempre un sottospazio vettoriale (che si chiama *sottospazio vettoriale generato dal sottoinsieme*). Anche in questo caso, quindi, si ottiene un sottospazio vettoriale — un piano, visto che i due generatori sono linearmente indipendenti.
- Tra le soluzioni dell'equazione manca il vettore nullo $(0, 0, 0)$, e l'insieme delle soluzioni non può pertanto essere un sottospazio vettoriale. E' invece un sottospazio affine che si ottiene traslando l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x + y + z = 0$, che è invece un sottospazio vettoriale.
- Anche in questo caso, non si tratta di un sottospazio vettoriale. Ad esempio, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ sono soluzioni dell'equazione, ma la loro somma $(1, 1, 2)$ non lo è. Geometricamente, si tratta di un cono centrato nell'origine; in particolare, è chiuso rispetto a moltiplicazione per uno scalare.

Tutte le risposte vanno giustificate. Risposte prive di giustificazione non verranno valutate.