Relazioni (d'ordine e di equivalenza)

/ V Ж $\qquad X \longleftrightarrow \mathbb{N}$ $\quad$ X è numerabile

infinito $\longrightarrow X \not\longleftrightarrow \mathbb{N}$ $\quad$ X è più che numerabile

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili $\qquad$ $\mathbb{R}$ è più che numerabile

---

Relazioni (binarie)

Una relazione su X è l'informazione di quando due elementi che appartengono allo stesso insieme X sono in relazione tra loro.

Una relazione su X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$

Notazione: $\quad (a,b) \in R \qquad aRb.$

$(3,5) \in \leq \qquad 3 \leq 5$

Propietà di interesse che una relazione può avere

Riflessività $\quad xRx \quad \forall x \in X$

Simmetria $\quad xRy \Longrightarrow yRx \qquad \forall x,y \in R.$

Antisimmetria $\quad xRy$ e $yRx \Longrightarrow x=y$

Transitività $\quad xRy$ e $yRz \Longrightarrow xRz$

Relazione d'ordine (parziale) su X: $\quad R + AS + T$

Relazioni di equivalenza $\quad : R + S + T$

Es: relazione vuota: Simmetrica, transitiva
non riflessiva

relazione "piena": R S T

$\leq$ su $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine : R AS T

X è un insieme $\quad \subseteq \quad \mathcal{P}(X)$

è una relazione su

non è una relazione d'ordine totale.

R: $A \subseteq A$

AS: $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$

T: $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

<u>Def</u>: R è una relazione d'ordine totale su X se

- è una relazione d'ordine
- $\forall x, y \in X \quad$ o $\ xRy\ $ o $\ yRx\ $ (o entrambe)

$\leq$ è una rel. d'ordine totale su $\mathbb{N}$ (su $\mathbb{Z}$, su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{R}$)

Una relazione d'ordine su X è un buon ordinamento se ogni sottoinsieme non vuoto di X possiede un elemento minimo.

$\forall\ U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ esiste $u \in U$ t.c. $\quad u \leq v \quad \forall v \in U$

Un buon ordinamento è totale. $\qquad x, y \in X$

$\{x, y\}$ ha elemento minimo (diciamo x)

$x \leq x \qquad x \leq y$

Non ogni relazione d'ordine totale è un buon ordinamento

$\leq$ non è un buon ordinamento su $\mathbb{R}$.

$\emptyset \neq (0,1) \subseteq \mathbb{R} \qquad$ non ha minimo.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \qquad$ non ha minimo.

<u>Cultura generale</u>: ogni insieme può essere dotato di un buon ordinamento. (se vale l'ax della scelta)

Però non si sa esibire un buon ordinamento su nessun insieme più che numerabile.

Relazioni di equivalenza, partizioni e insieme quoziente.

X insieme $\quad \sim$ relazione su X di equivalenza

$\sim$ è riflessiva, simmetica e transitiva.

Esempio (caratterizzante)

$f: X \to Y \qquad x \sim x' \iff f(x) = f(x')$.

$\sim$ è una rel. di equivalenza.

$x \sim x$ infatti $f(x) = f(x)$

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$ infatti $f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$

$\begin{matrix} x \sim y \\ y \sim z \end{matrix} \Rightarrow x \sim z$ infatti $\begin{matrix} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{matrix} \Rightarrow f(x) = f(z)$.

$\sim_f$

Partizione indotta da una relazione di equivalenza.

$\sim$ relazione di equivalenza sull'insieme X

$a \in X \qquad \bar{a} = [a] := \{x \in X \mid a \sim x\}$ ← classe di equivalenza di a

$a \in [a]$

Ogni classe di equivalenza è non vuota

Prop $\quad a \in [b] \iff a \sim b \iff [a] = [b] \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset$

Dim:

$a \in [b] \Rightarrow a \sim b$ ✓ ⟶

$$\begin{matrix} a \sim b & \iff & b \in [a] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ b \sim a & \iff & a \in [b] \end{matrix}$$

$a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$

devo mostrare che $[a] \subseteq [b]$ e $[b] \subseteq [a]$

$x \in [a]$ $\quad \cancel{a \sim x}$ $\quad a \sim b$ $\quad b \sim a$ $\xrightarrow{\text{transitività}}$ $b \sim x \iff x \in [b]$

$[a] = [b] \implies [a] \cap [b] \neq \emptyset$ $\quad$ ovvio

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \implies a \in [b]$

$\underset{x}{\cup}$

$a \sim x \implies x \sim a$ $\quad b \sim x$ $\longrightarrow$ $\underline{b \sim a}$

$a \sim b \iff \underset{\overset{\cup}{a}}{[a]} = [b] \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset$ $\quad$ $\sim$ è rel. di eq. su X

- Classi di equivalenza distinte sono disgiunte
- ogni elemento appartiene alla sua classe di equivalenza
- L'unione delle classi di equivalenza è tutto X

<u>Gergo</u>: una partizione di X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti disgiunti la cui unione è X.

<u>Conclusione</u>: ogni relazione di equivalenza $\sim$ su X individua una partizione di X costituita dalle sue classi di equivalenza

<u>Def</u>: $\sim$ rel. di equivalenza su X

L'insieme quoziente $X/\sim$ è l'insieme delle classi di equivalenza

$$X/_{\sim} = \{ [a] \mid a \in X \} \subseteq P(X)$$

$\pi : X \to X/_{\sim}$ $\qquad\qquad \pi(x) = [x]$

proiezione
(canonica, naturale, al quoziente ...)

<u>Esempio</u> (caratterizzante. 2a parte). $\qquad f \qquad \cancel{\pi}\ \pi_\sim$

$\sim$ rel. di equiv su X $\qquad \pi : X \to X/_{\sim}$

$\sim_\pi$ $\qquad x \sim_\pi x' \iff \pi(x) = \pi(x')$

$$\underset{[x]}{\pi(x)} = \underset{[x']}{\pi(x')}$$

$$\Updownarrow$$

la relazione $\sim_\pi$ coincide con la relazione $\sim$ $\qquad x \sim x'$

$\sim_\pi \quad \sim_{\pi_\sim}$

Che vuol dire "è ben definito"?

Teorema di omomorfismo per insiemi

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ $\qquad f\left(\frac{a}{b}\right) = a+b$ dove a e b coprimi

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \quad f\left(\frac{4}{6}\right) = 10 \qquad \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{4}{6}$ ⚠

$f\left(\frac{-2}{-3}\right) = -5$

<u>Teorema</u> $\sim$ rel. di equiv. sull'insieme X

$X \xrightarrow{f} Y$

$f : X \to Y$.

Allora esiste! $F : X/_\sim \to Y$

tale che $f = F \circ \pi$

se e solo se f soddisfa

$$x \sim x' \Longrightarrow f(x) = f(x').$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$\pi : X \to X/_\sim$
soddisfa $[x] = [x']$
$x \sim x' \Rightarrow \pi(x) = \pi(x')$

<u>Dim:</u> esiste $F \Longrightarrow f$ soddisfa

Se $f = F \circ \pi$ allora $f(x) = (F \circ \pi)(x) = F(\pi(x)) =$

$= F([x])$

$$x \sim x' \Longrightarrow [x] = [x'] \Longrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = F([x]) \\ f(x') = F([x']) \end{array} \right)$$

f soddisfa $\Longrightarrow$ esiste F

Se $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ è vero, allora esiste!

$F : X/_\sim \to Y$ tale che $\underline{f = F \circ \pi}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

affinché tutto funzioni

l'unica possibilità è
che F mandi $[x]$ in $f(x)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\pi"'] & f(x) \\ {[x]} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} F([x]) & \stackrel{\text{def}}{=} & f(x) \\ \parallel & & \parallel \\ F([x']) & = & f(x') \end{array}$$

F è ben definita

Riassumendo in parole povere:

~~se voglio~~ definire un'applicazione $F: X/_{\sim} \to Y$

è la stessa cosa che definire $f: X \to Y$

tale che $x \sim x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$

Es: $X = \mathbb{N}$ $\quad \sim$ = avere la stessa parità

$$3 \not\sim 6 \qquad 3 \sim 5 \qquad 0 \sim 18$$

$$\boxed{0 \equiv 18 \mod 2}$$

$$P = [0] = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$
$$D = [1] = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$\mathbb{N}/_{\sim} = \{[0], [1]\} = \{\{0,2,4,\dots\}, \{1,3,5,\dots\}\}$$

l'insieme quoziente ha 2 elementi.

$$3 - 7 \qquad (3,7) \qquad (2,6)$$

$$\boxed{a - b = c - d}$$

$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\boxed{a + d = b + c}$$

Introduco la relazione

$$(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a + d = b + c$$

Es: è una relazione di equivalenza.

$$X/_{\sim} = \mathbb{Z} \qquad [(a,0)] \quad a$$
$$[(0,a)] \quad -a$$