

## Relazioni (d'ordine e di equivalenza)

$\mathbb{N}$   $\mathbb{Z}$   $\mathbb{Q}$   $\infty$   $X \leftrightarrow \mathbb{N}$   $X$  è numerabile  
 infinito  $\rightarrow X \not\leftrightarrow \mathbb{N}$   $X$  è più che numerabile  
 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  sono numerabili  $\mathbb{R}$  è più che numerabile

---

## Relazioni (binarie)

Una relazione  $\mathcal{R}$  su  $X$  è l'informazione di quanto due elementi che appartengono allo stesso insieme  $X$  sono in relazione tra loro.

Una relazione su  $X$  è un sottoinsieme  $R \subset X \times X$

Notazione:  $(a, b) \in R$   $a R b$ .

$(3, 5) \in \leq$   $3 \leq 5$

Proprietà di interesse che una relazione può avere

Riflessività  $x R x \quad \forall x \in X$

Simmetria  $x R y \Rightarrow y R x \quad \forall x, y \in R$ .

Antisimmetria  $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$

Transitività  $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Relazione d'ordine (parziale) su  $X$ :  $R + AS + T$

Relazioni di equivalenza :  $R + S + T$

Es: relazione vuota : Simmetrica, transitiva  
non riflessiva

relazione "piena" :  $R$   $S$   $T$

$\leq$  su  $\mathbb{N}$  è una relazione d'ordine :  $R$   $AS$   $T$

$X$  è un insieme  $\subseteq P(X)$   $R: A \subseteq A$   
 è una relazione su  $\uparrow$   $A: A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A=B$   
 $\uparrow$   $T: A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$   
 non è una relazione d'ordine totale.

Def:  $R$  è una relazione d'ordine totale  $\searrow$  su  $X$

- è una relazione d'ordine
- $\forall x, y \in X \quad \circ \quad xRy \quad \circ \quad yRx$  (o entrambe)

$\leq$  è una rel. d'ordine totale su  $\mathbb{N}$  (su  $\mathbb{Z}$ , su  $\mathbb{Q}$ , su  $\mathbb{R}$ )

Una relazione d'ordine su  $X$  è un buon ordinamento se ogni sottoinsieme non vuoto di  $X$  possiede un elemento minimo.

$\forall U \subseteq X$  esiste  $u \in U$  t.c.  $u \leq v \quad \forall v \in U$   
 $\neq \emptyset$

Un buon ordinamento è totale.  $x, y \in X$   
 $\{x, y\}$  ha elemento minimo (diciamo  $x$ )

Non ogni relazione d'ordine totale è un buon ordinamento  $x \leq x \quad x \leq y$

$\leq$  non è un buon ordinamento su  $\mathbb{R}$ .

$\emptyset \neq (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  non ha minimo.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$  non ha minimo.

Cultura generale: ogni insieme può essere dotato di un buon ordinamento. (se vale l'ax dell' scelta)

Però non si sa esibire un buon ordinamento su nessun insieme più che numerabile.

---

Relazioni di equivalenza, partizioni e insiemi quozienti.

$X$  insieme  $\sim$  relazione su  $X$  di equivalenza  
 $\sim$  è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio (caratterizzante)

$$f: X \rightarrow Y \quad x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

$\sim$  è una rel. di equivalenza.

$$x \sim x \quad \text{infatti} \quad f(x) = f(x)$$

$$x \sim y \iff y \sim x \quad \text{infatti} \quad f(x) = f(y) \implies f(y) = f(x)$$

$$\begin{array}{l} x \sim y \iff y \sim z \\ y \sim z \end{array} \implies x \sim z \quad \text{infatti} \quad \begin{array}{l} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{array} \implies f(x) = f(z)$$

$\sim_f$

Partizione indotta da una relazione di equivalenza.

$\sim$  relazione di equivalenza sull'insieme  $X$

$$a \in X \quad \bar{a} = [a] := \{x \in X \mid a \sim x\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{classe di} \\ \text{equivalenza} \\ \text{di } a \end{array}$$

$\downarrow$   
a

Ogni classe di equivalenza è non vuota

Prop  $a \in [b] \iff a \sim b \iff [a] = [b] \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset$

Dim:

$$a \in [b] \implies a \sim b \quad \checkmark$$



$$\begin{array}{ccc} a \sim b & \iff & b \in [a] \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ b \sim a & \iff & a \in [b] \end{array}$$

$$(a \sim b) \implies [a] = [b]$$

devo mostrare che  $[a] \subseteq [b]$  e  $[b] \subseteq [a]$

$$x \in [a] \quad \begin{array}{c} (a \sim x) \\ a \sim b \\ \text{transitività} \\ \hline b \sim x \end{array} \iff x \in [b]$$

$(b \sim a)$

$$[a] = [b] \implies [a] \cap [b] \neq \emptyset \quad \text{ovvio}$$

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \implies a \in [b]$$

$\cup$   
 $x$

$$\begin{array}{c} a \sim x \implies (x \sim a) \\ \text{---} \\ (b \sim x) \end{array} \implies \text{---} \implies b \sim a$$

$$a \sim b \iff [a] = [b] \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset \quad \left| \begin{array}{l} \sim \text{ è rel. di eq.} \\ \text{su } X \end{array} \right.$$

$\cup$   
 $a$

- Classi di equivalenza distinte sono disgiunte
- ogni elemento appartiene alla sua classe di equivalenza
- L'unione delle classi di equivalenza è tutto  $X$

Def: una partizione di  $X$  è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti disgiunti la cui unione è  $X$ .

Conclusione: ogni relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$  individua una partizione di  $X$  costituita dalle sue classi di equivalenza

Def:  $\sim$  rel. di equivalenza su  $X$

L'insieme quoziente  $X/\sim$  è l'insieme

delle classi di equivalenza

$$X/\sim = \{ [a] \mid a \in X \} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$\pi: X \rightarrow X/\sim \quad \pi(x) = [x]$$

proiezione

(canonica, naturale, al quoziente...)

Esempio (caratterizzate. 2a parte).  $f$   $\pi/\pi_\sim$

$\sim$  rel. di equiv su  $X$

$$\pi: X \rightarrow X/\sim$$

$$\sim_\pi \quad x \sim_\pi x' \iff \begin{matrix} \pi(x) = \pi(x') \\ \parallel \quad \parallel \\ [x] \quad [x'] \end{matrix}$$

la relazione  $\sim_\pi$

coincide con la

relazione  $\sim$

$$\sim_\pi \quad \sim_{\pi_\sim}$$

Che vuol dire "è ben definito"?

Teorema di omomorfismo per insiemi

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = a+b$$

dove  $a, b$   
coprime

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 5$$

$$f\left(\frac{4}{6}\right) = 10$$

$$\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{4}{6}$$



$$f\left(\frac{-2}{-3}\right) = -5$$

Teorema  $\sim$  rel. di equiv. sull'insieme  $X$

$$\forall f: X \rightarrow Y$$

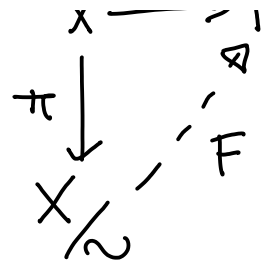
$$f: X \rightarrow Y.$$

Allora esiste  $F: X/\sim \rightarrow Y$

talche  $f = F \circ \pi$

se e solo se  $f$  soddisfa

$$x \sim x' \implies f(x) = f(x').$$



$\pi: X \rightarrow X/\sim$   
 soddisfa  $[x] = [x']$   
 $x \sim x' \implies \pi(x) = \pi(x')$

Dim: esiste  $F \implies f$  soddisfa

$$f = F \circ \pi \quad \text{allora} \quad f(x) = (F \circ \pi)(x) = F(\pi(x)) = F([x])$$

$$x \sim x' \implies [x] = [x'] \implies \begin{cases} f(x) = F([x]) \\ f(x') = F([x']) \end{cases}$$

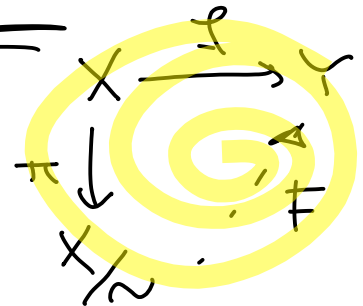
$f$  soddisfa  $\implies$  esiste  $F$

Se  $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$  è vero, allora esiste!

$F: X/\sim \rightarrow Y$  tale che  $f = F \circ \pi$ .

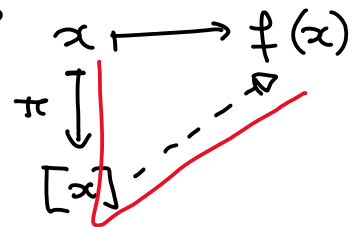
affinche tutte funzioni

l'unica possibilita' e' che  $F$  mandi  $[x]$  in  $f(x)$ .



$$\begin{aligned} F([x]) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \\ \hline F([x']) &= f(x') \end{aligned}$$

$F$  e' ben definita



Riassumendo in parole povere :

~~se~~ meglio definire un'applicazione  $F: X/\sim \rightarrow Y$

è la stessa cosa che definire  $f: X \rightarrow Y$

tale che  $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$

---

Es:  $X = \mathbb{N}$        $\sim =$  avere la stessa parità

$$3 \not\sim 6 \quad 3 \sim 5 \quad 0 \sim 18$$

$$P = [0] = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$D = [1] = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$0 \equiv 18 \pmod{2}$$

$$\mathbb{N}/\sim = \{ [0], [1] \} = \{ \{0, 2, 4, \dots\}, \{1, 3, 5, \dots\} \}$$

è insieme quoziente ha 2 elementi.

---

$$3 - 7$$

$$(3, 7)$$

$$(2, 6)$$

$$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$a - b = c - d$$

Introduco la relazione

$$a + d = b + c$$

$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def}}{\iff} a + d = b + c$$

Es: è una relazione di equivalenza.

$$X/\sim = \mathbb{Z}$$

$$[(a, 0)]$$

$a$

$$[(0, a)]$$

$-a$