Costruzione di $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$.

Conosciamo $\mathbb{N} \leftarrow$ l'insieme dei numeri naturali
$+, \cdot, \leq$

In $\mathbb{N}$ non so sempre eseguire la sottrazione

$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(a,b) significa $a-b$

$(3,1) \sim (125,123)$ significano la stessa cosa

$(1,15) \sim (100,114)$

elementi di $\mathbb{N}$

$(a,b) \sim (c,d)$ quando $a-b=c-d$

$a+d=b+c$

Impongo una relazione su X definita da

$$(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\iff} a+d=b+c.$$

Prop: questa è una rel. di equivalenza.

Riflessività: $(a,b) \sim (a,b)$ In effetti $a+b=b+a$

Simmetria: $(a,b) \sim (c,d) \iff a+d=b+c$

$\Downarrow ?$

$(c,d) \sim (a,b) \iff c+b=d+a$

Transitività: $(a,b) \sim (c,d)$ $\quad a+d=b+c$

$(c,d) \sim (e,f)$ $\quad c+f=d+e$

$$a+\cancel{c}+\cancel{d}+f = b+\cancel{c}+\cancel{d}+e$$

$\Downarrow ?$

$(a,b) \sim (e,f)$ $\quad a+f=b+e \leftarrow$ da dimostrare

$$X \times X /_{\sim} = \mathbb{Z} \ni [(a,b)] \qquad a,b \in \mathbb{N}.$$

Operazione di somma

$[(a,b)] + [(c,d)]$

$(a-b) + (c-d) = a+c-b-d$

$= (a+c) - (b+d)$

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c\ ,\ b+d)]$$

Questa è una buona definizione?

Se (a,b) e (a',b') sono nella stessa classe di equivalenza, è vero che $(a+c, b+d) \sim (a'+c, b'+d)$?

$$(a,b) \sim (a',b') \iff a+b' = a'+b$$

Da queste informazione posso concludere che

$$a+c+b'+d = b+d+a'+c$$

Sì.

Questa è una buona definizione dell'operazione di somma.

$[(0,0)] = 0$ è un elemento neutro di questa operazione

$$[(0,0)] + [(c,d)] = [(0+c, 0+d)] = [(c,d)]$$ (anche dall'altro lato)

$$[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, a+b)] = [(0,0)]$$

$$(a+b, a+b) \sim (0,0)$$

<u>Moltiplicazione</u>: $[(a,b)] \cdot [(c,d)]$

$$\shortparallel$$

$$[(ac+bd,\ ad+bc)]$$

$(a-b)\cdot(c-d) =$

$= ac + bd - ad - bc$

$= (ac+bd) - (ad+bc)$

<u>Es: è una buona definizione.</u>

$[(a,0)] = a \qquad [(0,b)] = -b$.

$[(a,0)] = a \qquad [(0,b)] = -b \qquad a,b \in \mathbb{N}.$

$$[(0,0)] = 0 = -0$$

- Non ci sono altre classi

$$[(x,y)] = \begin{cases} [(0,0)] & \text{se } x = y \\ [(x-y,0)] & \text{se } x \geq y \\ [(0,y-x)] & \text{se } x \leq y \end{cases} \qquad x,y \in \mathbb{N}$$

$(x,x) \sim (0,0)$ ✓

l'unico naturale che sommato a y dà x.

$x \geq y \qquad (x,y) \sim (x-y,0) \qquad x+0 = y+(x-y)$

l'altro caso si fa allo stesso modo

$$[(x,y)] = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ x-y & \text{se } x \geq y \\ -(y-x) & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

- Queste classi sono tutte diverse.

$$[(a,0)] = [(b,0)] \Longleftrightarrow (a,0) \sim (b,0) \Longleftrightarrow a = b$$

$$a \neq b \Longrightarrow a \neq b \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{N}.$$

(Stessa cosa con $[(0,a)]$ e $[(0,b)]$ Ragionamento identico)

$$[(a,0)] = [(0,b)] \Longleftrightarrow (a,0) \sim (0,b) \Longleftrightarrow a+b = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0.$$

$0 = \cancel{-0}$ è l'unico elemento

con una doppia notazione.

$$a + b = a+b$$
$$-a + -b = -(a+b)$$
$$a + (-b) = \begin{cases} a-b & \text{se } a \geq b \\ -(b-a) & \text{se } a \leq b \end{cases}$$

$$\boxed{[(a,b)]\cdot[(c,d)] = \\ = [(ac+bd,\ ad+bc)]}$$

$$a \cdot b = [(a,0)]\cdot[(b,0)] = [(ab,0)] = ab$$

Es: mostrare che

$$a \cdot -b = -ab$$
$$-a \cdot b = -ab$$
$$-a \cdot -b = ab$$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è numerabile

$$\begin{array}{cccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \cdots & \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots & \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & \\ (3,0) & (3,1) & & & & \end{array}$$

8

12

$8+12$

In $\mathbb{Z}$ vale la legge di annullamento del prodotto

$$xy = 0 \implies x=0 \text{ opp } y=0 .$$

Relazione d'ordine

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \overset{\text{def}}{\iff} a+d \leq b+c$$

$a-b \leq c-d$

$a+d \leq b+c$

Es: funziona tutto!

Ex.

$$\underset{[(a,0)]}{\underset{\shortparallel}{a}} \le \underset{[(b,0)]}{\underset{\shortparallel}{b}} \iff a \le b$$

naturali

$$\underset{[(a,0)]}{\underset{\shortparallel}{a}} \le \underset{[(0,b)]}{\underset{\shortparallel}{-b}} \iff a+b \le 0 \iff a=b=0$$

naturali

$$\underset{[(0,a)]}{-a} \le \underset{[(b,0)]}{\underset{\shortparallel}{b}} \iff 0 \le a+b \quad \underline{\text{sempre}}.$$

$$-a \le -b \iff b \le a$$

"ℕ si immerge in ℤ rispettando le operazioni e la struttura d'ordine"

$$i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$m \mapsto m$$

$$i(m+n) = i(m) + i(n)$$
$$i(m \cdot n) = i(m) \cdot i(n)$$
$$m \le n \iff i(m) \le i(n)$$

i è iniettiva

Costruzione di ℚ a partire da ℤ.

$$\frac{a}{b}$$

$$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

$$(a,b) \sim (c,d) \overset{\text{def}}{\iff} ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

Definita così, non è transitiva.

$$(2,3) \sim (0,0) \sim (15,37)$$

$$2\cdot 0 = 3 \cdot 0$$

$$(2,3) \nsim (15,37)$$

$$74 \neq 45$$

Prop: $\sim$ è una rel. di equivalenza su $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Rifl: $(a,b) \sim (a,b)$ Infatti $ab = ba$

Ex: $\cdot$ è commutativo in $\mathbb{Z}$

Simm: $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$

$\Downarrow ?$

$(c,d) \sim (a,b) \iff cb = da$

Transitività. $(a,b) \sim (c,d)$ $\quad ad = bc$ ✓

$(c,d) \sim (e,f)$ $\quad cf = de$ ✓

$\Downarrow ?$

$(a,b) \sim (e,f)$ $\quad af = be$ sta succeded in $\mathbb{Z}$

$$ad = bc \Longrightarrow adf = b(\underbrace{cf}_{de}) \Longrightarrow adf = bde \qquad \boxed{d \neq 0}$$

$$\Longrightarrow \underset{\neq 0}{d}(af - be) = 0 \Longrightarrow af - be \Longrightarrow af = be$$

$[(a,b)] = \dfrac{a}{b}$ ← notazione $\qquad \dfrac{a}{1} = a$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

sono ben definite

Si definisce in modo simile anche $\leq$.

Importante:

In $\mathbb{Z}$ ogni elemento ha un inverso additivo

$$[(a,b)] + [(b,a)] = 0 \qquad -a = -a$$

$$-(-a) = a$$

$$-0 = 0$$

In $\mathbb{Q}$ ogni elemento non nullo ha un inverso moltiplicativo.

El. neutro $\quad \frac{1}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \qquad \frac{1}{1} = 1.$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1} \qquad (ab, ab) \sim (1,1)$$

$a \neq 0$, $b \neq 0$ $\qquad ab = ab.$

Le frazioni $\frac{a}{b}$ con $a \neq 0$ hanno inverso moltiplicativo.

$$\frac{0}{b} = \frac{0}{1} = 0 \qquad (0,b) \sim (0,1) \quad ✓$$

$$0 = 0$$

Terminologia

GRUPPO $\quad G$ insieme (non vuoto) con un'operazione

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G \qquad \text{associativa} \quad (ab)c = a(bc)$$
$$(g,h) \longmapsto gh$$

che possiede un elemento neutro $e \in G \qquad ex = xe = x$

e tale che ogni elemento di G possiede un inverso

$g \in G \Longrightarrow$ esiste $h \in G$ tale che $gh = hg = e$.

Es: $(\mathbb{Z},+)$ è un gruppo. operazione $= +$
$e = 0$
inverso di $a = -a$

Se l'operazione del gruppo G è commutativa, G si dice ABELIANO.

Es: $(\mathbb{N},+)$ non è un gruppo (è un semigruppo monoide con proprietà di cancellazione)

[Ogni ~~monoide~~ semigruppo cancellativo si immerge in un gruppo].

ANELLO: A insieme (non vuoto) con due operazioni

$+ : A \times A \to A$ (somma)
$\cdot : A \times A \to A$ (moltiplicazione)
associative.

$(A,+)$ è un gruppo abeliano (di el. neutro 0)

Vale la proprietà distr. $a(b+c) = ab+ac$ $(a+b)c = ac+bc$

Se $\cdot$ è commutativa allora l'anello è commutativo

Se $\cdot$ ha elemento neutro $1 \neq 0$ allora l'anello è con unità

Se un anello (commutativo) con unità A è tale che ogni elemento $\neq 0$ possiede inverso moltiplicativo, allora A è un campo. corpo

Se in un anello commutativo con unità A vale la legge di annullamento del prodotto, A si dice dominio di integrità

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un dominio d'integrità

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo

Ogni dominio di integrità si immerge in un campo
D

$X = D \times (D \setminus \{0\})$ $\qquad (a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$