$f: X \to Y$ induce una relazione (di equivalenza)

$$x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$$

$x, x' \in X$

Abbiamo dimostrato facilmente che questa è una rel. di equivalenza

Posso costruire il corrispondente insieme quoziente $X/\sim_f$ e la sua proiezione $\pi: X \to X/\sim_f$

$x \mapsto [x]$ ← classe di equiv. risp a $\sim_f$

Voglio mostrare che se $\sim$ è una rel. di equiv. su X allora esiste $f: X \to Y$ t.c. $\sim = \sim_f$.

$f = \pi: X \to X/\sim$

$x \mapsto [x]$ ← classe di equiv risp a $\sim$

$$\underset{[x]}{f(x)} = \underset{[x']}{f(x')} \iff x \sim x'$$

$$\underline{x \sim_f x'} \overset{\text{def}}{\iff} \underset{[x]}{f(x)} = \underset{[x']}{f(x')} \iff \underline{x \sim x'} \quad \sim_\pi$$

La relazione $\sim_f$ coincide con la relazione $\sim$.

---

1. $\phi: \{0,1,2,3,4\}^{\mathbb{N}} \to \underline{\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}}$ così definita

$$\underline{(\phi(f))(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(n) \in \{0,2,4\} \\ \underline{1} & \text{se } f(n) \in \{\underline{1},3\}. \end{cases}$$

$f = (0,1,2,3,4,0,1,2,3,\dots)$

$\phi(f) = (0,1,0,1,0,0,1,0,1,\dots)$

- Dire se ϕ è iniettiva / suriettiva
  no / no

$(0,0,0,0,\dots)$
$(2,2,2,2,\dots)$ hanno la stessa immagine

• Determinare $\mathrm{Im}(\phi) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $(2,0,0,\dots,0) \notin \mathrm{Im}\,\phi$ immagine

• Determinare $\phi^{-1}(g)$ dove $g \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ è tale che $\underline{g(i) = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}}$.

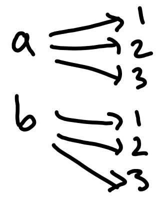
$\| (1,1,1,1,1,1,\dots)$

$X^{\mathbb{N}} = \{$successioni $(f_0, f_1, f_2, \dots)$ a valori in $X\}$

$$\underline{X^Y} = \{ f : Y \to X \}$$

$X = \{1,2,3\}$ $\quad Y = \{a,b\}$.

$f : Y \to X$



$|X^Y| = 9 \quad |X| = 3 \quad |Y| = 2$

$\quad \shortparallel$

$|X|^{|Y|} = 3^2$

$$X \times Y = \{ (1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b) \}$$

$$|X \times Y| = 6 = |X| \times |Y|$$

$2^0 = 1 \quad |X^Y|$ $\qquad X = \{1,2\} \quad Y = \emptyset$

Quante sono le applicazioni $f : \emptyset \to \{1,2\}$

$X^Y = \{$ applicazione vuota, che non assegna $\}$

$0^3 = 0$ $\qquad X = \emptyset \quad Y = \{1,2,3\}$

$f : \{1,2,3\} \to \emptyset$

X^Y non contiene applicazioni

$\to \emptyset \qquad |X^Y| = 0$

$\boxed{0^0 = 1}$ $\quad \{ f : \emptyset \to \emptyset \} = \{$ applicazione vuota $\}$

Se $f : X \to Y$ è un'applicazione "f^{-1}" può voler dire due cose"

① L'inversa di f, se f è invertibile (corrisp. biunivoca biiezione)

$f^{-1}: Y \to X$

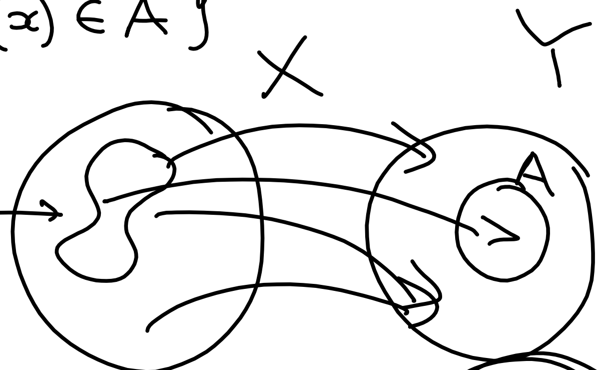
② L'applicazione "controimmagine"

$f^{-1}: P(Y) \to P(X)$ $\qquad A \subseteq Y$

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

$\parallel$

"controimmagine di A attraverso f". $\qquad f^{-1}(A) \longrightarrow$



<u>ABUSO DI NOTAZIONE</u>

Se $y \in Y$, posso voler calcolare $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$

indica la controimmagine di y anche e soprattutto quando y non è invertibile

$$\phi^{-1}((1,1,1,1,1,\dots)) = \{1,3\}^{\mathbb{N}}$$

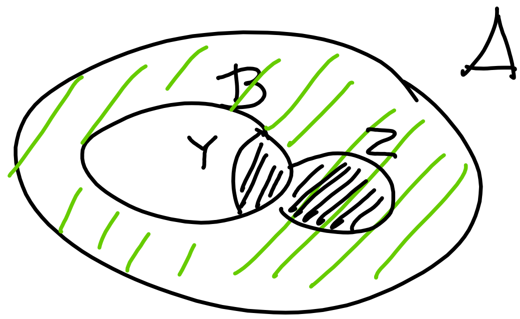
---

2. $B \subseteq A$ insiemi. Mostrare che $P(A)$ è equipotente a $P(B) \times P(A \setminus B)$

X è equipotente a $Y \iff$ esiste un'applicazione invertibile $X \longrightarrow Y$

<u>Traduzione</u>: se B è un sottoinsieme di A, dare una corrispondenza biunivoca tra $P(A)$

e $P(B) \times P(A \setminus B)$.



$$P(A) \longrightarrow P(B) \times P(A \setminus B)$$
$$\begin{array}{ccc} \overset{\in}{X} & \longmapsto & (X \cap B, X \setminus B) \\ Y \cup Z & \longleftarrow & (Y, Z) \\ X \subseteq A & & \begin{array}{cc} \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}} & \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}} \\ B & A \setminus B \end{array} \end{array}$$

$\blacksquare = A \setminus B$

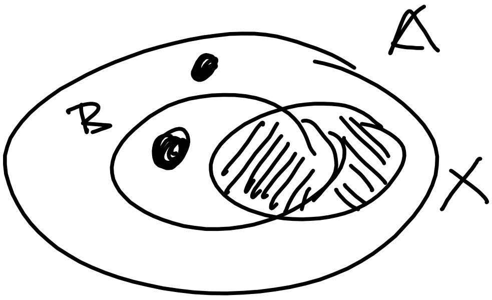
$$(X \cap B) \cup (X \setminus B) = X$$

Sostengo che le due composizioni siano entrambe l'identità.

$$\underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}\ \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}} \\ B \quad A\setminus B}}{(Y, Z)} \longmapsto \overset{\substack{A \quad A \\ \text{\rotatebox{90}{$\supseteq$}}\ \ \text{\rotatebox{90}{$\supseteq$}}}}{Y \cup Z} \longmapsto \big(\underset{\substack{\| \\ Y}}{(Y \cup Z) \cap B}, \underset{\substack{\| \\ Z}}{(Y \cup Z) \setminus B}\big)$$

$B \subseteq A$

Y stanno in B; Z stanno fuori da B



3\. X insieme ~~finito~~. $H := \{0, 1\}^X$.

Mostrare che esiste una biiezione $P(X) \longrightarrow H$.

$H = \{ f : X \longrightarrow \{0, 1\} \}$.

$A \in P(X)$
$\Updownarrow$ def
$A \subseteq X$

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \longrightarrow & H \\ \overset{\in}{A} & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

$$P(X) \longleftarrow H$$

Queste due applicazioni sono una l'inversa dell'altra

$\underline{\{x \in X \mid f(x) = 1\}} \leftarrow 1 \; (f)$ ... e quindi entrambe invertibili.

$P(X) \qquad 2^X = \{0,1\}^X$

~~$0 = \emptyset$~~
~~$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$~~
~~$2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$~~
~~$3 = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$~~

5. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$.

$$g : A \times B \longrightarrow A \times B$$
$$(a,b) \longmapsto (ab, a+b)$$

$a+b = s$
$ab = p$
$\Downarrow$
a e b sono le radici di $\boxed{x^2 - sx + p = 0}$

5.2 dire se g è iniettiva/suriettiva.

g è iniettiva? Sì, perché ab e $a+b$ individuano a e b a meno dell'ordine.
Ma allora il pari è a e il dispari è b.

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$.

$$(2,3) \longmapsto (\overset{p}{6}, \overset{s}{5})$$
$$\cancel{(3,2)} \longmapsto (6,5)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$$

g è suriettiva

---

6. Si costruiscano esempi di insiemi con una relazione che gode di due delle tre proprietà che definiscono una relazione di eq. (MA NON DELL'ALTRA).

	Rifl.	Simm.	Trans.
①	X	X	
②	X		X
③		X	X

$X = \{a,b,c\}$

① R, S ma non T

aRa $\quad aRb \quad bRa \quad | \quad a \cancel{R} c$
$bRb \quad bRc \quad cRb$

① R+S ma non ... cRc | $c \not R a$.

non è T poiché aRb, bRc ma $a \not R c$ è R, S

---

② aRa aRb $b \not R a$ R ok non S ✓
bRb bRc $c \not R b$
cRc aRc $c \not R a$

$a=1$
$b=2$ $R = \leq$
$c=3$

---

③ S+T ma non R — non riflessiva poiché $a \not R a$

~~false~~

bRb bRc
cRb cRc

simmetria ok

si poiché $\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix} \Longrightarrow x,y,z \in \{b,c\} \Downarrow xRz$.

---

8. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

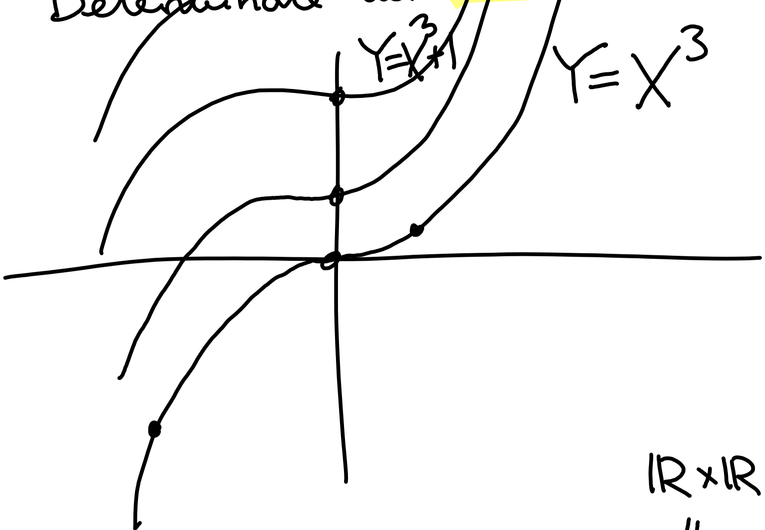
$(x,y) \approx (z,w) \Longleftrightarrow$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$y = x^3 + a$ e $w = z^3 + a$.

$y - x^3 = a$ e $w - z^3 = a$
$\Updownarrow$
$y - x^3 = w - z^3$

8.1 Mostrare che $\approx$ è di equivalenza

8.2 Determinare un sistema di rappresentanti per $X/\approx$.



Dimostrazione alternativa

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\parallel$
$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto y - x^3$.

$\approx \; = \; \sim_f$

$$(x,y) \sim_f (z,w)$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x,y) = f(z,w)$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{y - x^3 = w - z^3}$$

$(0,a) \mapsto a$