ALGEBRA 1 - Primo esame scritto

25 gennaio 2021

1. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}$ il sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \mod (15)\,, \\ 3ax \equiv 12 \mod (21) \end{cases}$$

   ammette soluzioni. Scelto un tale valore di a, calcolare tutte le soluzioni del sistema corrispondente.

2.
   - Se G è un gruppo semplice di ordine $1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, calcolare il numero dei suoi 7-Sylow e dei suoi $13-$Sylow.
   - Mostrare che non esistono gruppi semplici di ordine 1365.

3. Ricordiamo che se g è un elemento del gruppo G, l'applicazione $G \ni x \mapsto gxg^{-1} \in G$ è l'*automorfismo interno* di G indotto da g. Gli automorfismi interni formano un sottogruppo $\mathrm{Int}(G)$ del gruppo $\mathrm{Aut}(G)$ costituito da tutti gli automorfismi del gruppo G.
   - Mostrare che $\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$, dove $Z(G)$ è il centro di G.
   - Mostrare che se $\mathrm{Aut}(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.

4. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, consideriamo l'ideale $I = (6 + 8i, 8 - i)$.
   - Dire se $\mathbb{Z}[i]/I$ è un dominio d'integrità.
   - Dire se $\mathbb{Z}[i]/I$ è un campo.

5. Il campo F è un'estensione del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e contiene una radice α del polinomio $x^3 - 2x + 6$.
   - Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ dell'elemento algebrico $\beta = \alpha^2 + 1 \in F$.
   - Trovare il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}$.
   - Trovare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\beta)$.