

ALGEBRA 1 - Secondo esame scritto

16 febbraio 2021

- Calcolare l'inverso di $[27]$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}/(91)^\times$.
 - Calcolare l'ordine di $[26]$ nel gruppo additivo $\mathbb{Z}/(91)$.
2. Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo e N un sottogruppo normale di G . Mostrare che se N è abeliano e $G = NH$ allora $N \cap H$ è un sottogruppo normale di G .
3. Poniamo
$$I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(3) = f(4/5) = f(\sqrt{3}) = 0\}.$$
 - Mostrare che I è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$.
 - Determinare gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono I .
4. G è un gruppo di ordine $598 = 2 \cdot 13 \cdot 23$ che agisce su un insieme X che possiede 16 elementi.
 - Mostrare che l'azione di G su X ha almeno tre orbite.
 - Mostrare che se l'azione di G su X non ha punti fissi, allora vi sono esattamente 8 orbite.
5. Sia $\alpha = \sqrt{5} + i \in \mathbb{C}$.
 - Individuare il polinomio minimo di α su \mathbb{Q} .
 - Dimostrare che l'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ è di Galois.
 - Usando la corrispondenza di Galois, descrivere tutte le sottoestensioni di grado 2 dell'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$.