

## ALGEBRA 1 - Quarto appello scritto

8 luglio 2021

1. Determinare quanti siano gli elementi di ordine 3 nel gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}/(35)^\times$ .
2. Mostrare che un gruppo di ordine 45 è necessariamente abeliano. Esibire un tale gruppo che non sia ciclico.
3. Sia  $A$  un anello commutativo con unità. Mostrare che il sottoinsieme

$$N = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

è un ideale di  $A$ . Calcolare  $N$  quando  $A = \mathbb{Z}/(12)$ .

4. Dire per quali valori naturali di  $n > 1$  l'applicazione

$$\mathbb{Z}[i] \ni a + bi \mapsto a + b \in \mathbb{Z}/(n)$$

sia un omomorfismo di anelli.

5. Sia  $\alpha$  una radice complessa del polinomio  $x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .
  - Calcolare  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ;
  - Calcolare  $[\mathbb{Q}(\alpha^2) : \mathbb{Q}]$ .