Esercitazione Scritto Algebra I

(1) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{Z}$ il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 5^{x^3-1} \equiv 2^a \pmod{13} \\ x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

è risolubile e risolverlo.

(2) G è un gruppo di ordine 63, e P è un suo 7-Sylow.
- Mostrare che P è normale, e che G è prodotto semidiretto di P con un altro sottogruppo di G.
- Sia $f : G \to \mathrm{Aut}(P)$ l'omomorfismo che associa a ciascun elemento $g \in G$ il corrispondente automorfismo $P \ni x \mapsto gxg^{-1} \in P$. Mostrare che $\ker f$ contiene strettamente P.
- Mostrare che G non è isomorfo ad alcun sottogruppo del gruppo simmetrico S_9.

(3) Se $H < G$, allora $C(H) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ per ogni } h \in H\}$ è il *centralizzatore* di H.
- Mostrare che $C(H)$ è un sottogruppo di G.
- Mostrare che se $H \lhd G$, allora $C(H) \lhd G$.

(4)
- Dimostrare che per ogni numero primo p e intero a, l'ideale $(p, x - a)$ è massimale in $\mathbb{Z}[x]$.
- Sia $f(x)$ un polinomio monico irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$, di grado $n > 0$. Dimostrare che nessun polinomio nella forma $2 \cdot g(x) - 1$ appartiene all'ideale $(f(x))$.
- Sia $f(x)$ come sopra. Dimostrare che l'ideale $(f(x))$ non è mai massimale in $\mathbb{Z}[x]$.

(5) Siano $\pm\alpha, \pm\beta \in \mathbb{C}$ le quattro radici distinte di $f(x) = (x^2 - 7)^2 + 15 \in \mathbb{Q}[x]$.
- Calcolare $\alpha\beta$; quanto vale $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)]$?
- Calcolare $[\mathbb{Q}(\alpha + \beta) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\alpha - \beta) : \mathbb{Q}]$.
- Usando i punti precedenti, dimostrare che $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.
- Determinare, utilizzando la corrispondenza di Galois, tutte le estensioni intermedie $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ tali che $[L : \mathbb{Q}] = 2$.