ESERCIZI SU ANELLI, SOTTOANELLI ED IDEALI

1) Sia $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ munito delle operazioni di somma e prodotto componente per componente, che lo rendono un anello commutativo con unità. Dire se $B := \{(3a, x) \mid a, x \in \mathbb{Z}\}$ sia un sottoanello e/o un ideale di A.

2) Siano K un campo e $n \in \mathbb{N}$. Indichiamo con $K^{n,n}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ su K con le usuali operazioni $+$ e $\cdot$ di addizione e moltiplicazione tra matrici. Mostrare che:

(1) l'insieme $D^{n,n}$ delle matrici diagonali e l'insieme $T^{n,n}$ delle matrici triangolari superiori sono sottoanelli di $K^{n,n}$;

(2) se $n > 1$, allora
$$B := \{f \mid f := (f_{ij}) \in K^{n,n},\ \ f_{ij} = 0_K \text{ se } (i,j) \neq (1,1)\}$$
è un sottoanello di $K^{n,n}$. Osservare che B è un anello con unità, ma che $1_B \neq 1_{K^{n,n}}$.

3) Se $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ (che è un sottoanello di $\mathbb{C}$), indichiamo con f_t l'applicazione
$$f_t : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/(5), \qquad a + ib \longmapsto [a + bt],$$
dove $t \in \mathbb{Z}$. Determinare per quali valori di t l'applicazione f_t sia un omomorfismo di anelli.

4) Per ogni $z \in \mathbb{C}$, indichiamo con $\bar{z}$ il complesso coniugato di z. Dimostrare che
$$\mathbb{H} := \left\{ f \mid f \in \mathbb{C}^{2,2},\ \exists x, y \in \mathbb{C} \quad f = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \right\}$$
è un corpo. $\mathbb{H}$ è noto come il *corpo dei quaternioni* reali di Hamilton.

5) Siano $\emptyset \neq Y \subseteq X$ insiemi e consideriamo l'anello $(\mathbb{Z}^X, +, \cdot)$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto tra applicazioni. Se $J := \{f \mid f \in \mathbb{Z}^X, \quad f(y) = 0 \ \forall\ y \in Y\}$, mostrare che:

(1) J è ideale di $\mathbb{Z}^X$;

(2) $\mathbb{Z}^X / J$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^Y$.

6) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e sia $\mathcal{C}[a, b]$ l'insieme delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[a, b]$. Definiamo su $\mathcal{C}[a, b]$ le seguenti due operazioni $+$ e $\cdot$ ponendo, per ogni $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$,
$$f + g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x), \qquad f \cdot g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

(1) Mostrare che $(\mathcal{C}[a, b], +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

(2) Se $S \subseteq [a, b]$, mostrare che $\mathfrak{I}(S) := \{f \mid f \in \mathcal{C}[a, b]\ ,\ \forall x \in S\ \ f(x) = 0\}$ è un ideale di $\mathcal{C}[a, b]$.

7) Sia $T^{2,2}$ l'anello delle matrici triangolari superiori 2×2 su di un campo K. Dimostrare che

(1) l'insieme $I := \left\{ f \mid f \in T^{2,2},\ \exists\, b \in K \ \ f = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un ideale di $T^{2,2}$;
(2) $T^{2,2}/I$ è isomorfo a $D^{2,2}$.

8) Siano A e B anelli commutativi con unità e sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli.

(1) Dimostrare che se A è un campo allora f è iniettiva oppure $f = 0$.
(2) Si supponga f suriettiva. Mostrare che B è un campo se e solo se $\ker f$ è un ideale massimale di A.

9) Se $a < b \in \mathbb{R}$, indichiamo con $C[a, b]$ l'anello delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo chiuso $[a, b]$, con le usuali operazioni di somma e prodotto tra funzioni e $x \in [a, b]$.

(1) Mostrare che l'applicazione $\phi_x : C[a, b] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, è un omomorfismo suriettivo di anelli.
(2) Mostrare che il sottoinsieme di $C[a, b]$ costituito dalle funzioni costanti è un sottoanello di $C[a, b]$ isomorfo a $\mathbb{R}$
(3) Mostrare che l'ideale $\mathfrak{I}_x \subset C[a, b]$ costituito dalle funzioni continue che si annullano in x è massimale.

10) Sia A un anello commutativo e J un ideale di A. Poniamo

$$\sqrt{J} := \{a | a \in A,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ a^n \in J\}.$$

Provare che $\sqrt{J}$ è un ideale di A contenuto nell'intersezione degli ideali primi di A contenenti J.

11) Sia J un ideale di $\mathbb{Z}$. Fornire una descrizione esplicita dell'ideale $\sqrt{J}$ definito come nell'esercizio precedente.

12) Sia A un anello commutativo con unità e M un ideale proprio di A. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) M è ideale massimale,
(2) $\forall a \in A \backslash M \ \ \exists x \in A \ \ 1 - ax \in M$.

13) Sia A un anello commutativo con unità tale che per ogni $x \in A$ esiste $n > 1$ per cui $x^n = x$ e M un ideale di A. Provare che M è ideale massimale se, e solo se, M è primo.

14) Sia A un dominio di integrità e siano $a, b \in A$. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) gli ideali generati da a e b in A coincidono;
(2) esiste $u \in A$ invertibile tale che $b = ua$.

15) Mostrare che l'anello $\mathbb{Z}/(15)$ ha due soli ideali non banali e che tali ideali sono massimali.

16) Siano A e B anelli commutativi unitari e sia $f : A \to B$ un omomorfismo suriettivo di anelli. Mostrare che

(1) se P è un ideale primo di A contenente $\ker f$ allora $f(P)$ è un ideale primo di B;
(2) se Q è un ideale primo di B allora la controimmagine $f^{-1}(Q)$ di Q tramite f è un ideale primo di A contenente $\ker f$.

17) Siano A anello commutativo con unità e I, J ideali non nulli di A. Mostrare che, se $I + J = A$,

(1) $IJ = I \cap J$;
(2) $A/IJ \cong A/I \times A/J$ (che generalizza il Teorema cinese dei resti).