

ESERCIZI SU ARITMETICA SU \mathbb{Z}

- 1) Dimostrare che un intero della forma $4n + 3$ non si può scrivere come somma di due quadrati interi.
- 2) Siano $m, n > 0$. Si provi che
 - (a) se $a \in \mathbb{Z}$ e $m \mid n$, allora $a^m - 1 \mid a^n - 1$;
 - (b) se $2^n - 1 \in \mathbb{P}$, allora $n \in \mathbb{P}$;
 - (c) se $a > 0$, $n > 1$ e $a^n - 1 \in \mathbb{P}$, allora $a = 2$ e $n \in \mathbb{P}$.
- 3) Analogamente all'esercizio precedente, si mostri che se $a, n > 1$ sono tali che $a^n + 1 \in \mathbb{P}$, allora a è pari e n è una potenza di 2.
- 4) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$
 - (a) $7n^{34} - n^{21} + 22n^5 + 4n^4 - 21n$ è divisibile per 11;
 - (b) $n^{55} + 2n^{50} + 3n^{45} + 4n^3 + 5n^2 + 6n$ è divisibile per 7;
- 5) Si provi che per ogni numero primo $p > 3$
 - (a) esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $p \in \{6k + 1, 6k + 5\}$;
 - (b) per ogni $a \in \mathbb{Z}$ non divisibile per p vale che $p \mid a^{2p-2} + a^{p-1} + p - 2$;
 - (c) se $p > 5$, $p \mid \sum_{i=0}^{p-2} 10^i$.
- 6) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $12 \mid 5^n + 7^n$ se, e solo se, n è dispari.
- 7) Si provi che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$
 - (a) $\text{mcd}(ab, a + b) \mid \text{mcd}(a^2, b^2)$;
 - (b) $3a + 4$ e $4a + 5$ sono coprimi.