ESERCIZI SULLE AZIONI DI GRUPPO

1) Sia G un gruppo e $H \leq G$ finito. Mostrare che se $x \in G$ e $h_1, h_2 \in H$, allora

$$(h_1, h_2) \cdot x := h_2 x h_1^{-1},$$

definisce un'azione di $H \times H$ su G.

Posto, per ogni $x \in G$,

$$f_x : (H \times H) \cdot x \longrightarrow G, \qquad (h_1, h_2) \cdot x \longmapsto h_2 x h_1^{-1} x^{-1},$$

provare che H è un sottogruppo normale di G se, e solo se, $f_x((H \times H) \cdot x) \subseteq H$.

2) Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su di un insieme Ω e sia $H \trianglelefteq G$. Provare che

$$|H \cdot \alpha| = |H \cdot \beta| \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega.$$

3) Descrivere il centralizzatore della permutazione $(1\,2\,3)$ in S_n per ogni $n \geq 3$.

4) Il *derivato* G' del gruppo G il sottogruppo generato dai *commutatori* $xyx^{-1}y^{-1}$ al variare di $x, y \in G$. Descrivere A_n' quando $n \geq 4$.

5) Sia G un gruppo e Ω un insieme con almeno 3 elementi. Un'azione di G su Ω si dice 2-transitiva se per ogni $x, x_1, y, y_1 \in \Omega$ con $x \neq x_1$ e $y \neq y_1$ esiste $g \in G$ tale che

$$g \cdot x = y \quad \text{e} \quad g \cdot x_1 = y_1.$$

Mostrare che un'azione di G su Ω è 2-transitiva se, e solo se, lo stabilizzatore di ciascun $x \in \Omega$ agisce transitivamente su $\Omega \setminus \{x\}$.

6) Sia $G \neq \{1\}$ un gruppo finito nel quale gli elementi diversi dall'identit sono tutti coniugati tra loro. Determinare l'ordine di G.