ESERCIZI SUI CAMPI

1) Siano $F \subset K$ campi e $\alpha \in K$ un elemento algebrico su F di grado dispari. Si dimostri che $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

2) Stabilire se i campi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ siano isomorfi come anelli.

3) Siano $F \subseteq E$ campi, $\alpha, \beta \in E$, α algebrico su F e β trascendente su F. Si dimostri che $\alpha + \beta$ è trascendente su F.

4) Dire se esistono relazioni di inclusione tra i seguenti sottocampi di $\mathbb{C}$: $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$.

5) Sia $f := x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e $b \in \mathbb{C}$ tale che $f(b) = 0$. Provare che $\mathbb{Q}(b)$ contiene solo una radice di f.

6) Sia $\alpha := \sqrt{3 + \sqrt{3}}$. Si determini

(1) il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$;
(2) il grado $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^2)]$.

7) Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ dei seguenti campi: $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$, $E := \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$, $E \cap \mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$, $E \cap \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$.

8) Dire se gli anelli $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ e $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$ sono isomorfi e, nel caso, determinarne un isomorfismo esplicito.

9) Siano $f := x^3 - x - 1$, $g := x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e ω, α le loro radici in qualche estensione di $\mathbb{Q}$, rispettivamente. Si determini

(1) il grado $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}]$;
(2) l'inverso di $1 + \omega$, come combinazione $\mathbb{Q}$- lineare di $1, \omega, \omega^2$;
(3) $(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1)$, come combinazione $\mathbb{Q}$-lineare di $1, \alpha$.

10) Sia $\omega := 2i + \sqrt[3]{5} \in \mathbb{C}$. Si determinino

(1) i gradi $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}(i)]$ e $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})]$;
(2) i polinomi minimi di ω su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ e $\mathbb{Q}(i)$.