ESERCIZI SU CAMPI DEI QUOZIENTI, POLINOMI, DOMINI

1) Siano K un campo, $A \subsetneq K$ un sottoanello e D il campo delle frazioni di A. Mostrare che un elemento $\alpha \in K$ è algebrico su A se, e solo se, è algebrico su D.

2) Siano A un anello commutativo unitario, $a \in A$ e I un ideale di A. Poniamo

$$\mathcal{I} := \{f|\ f \in A[x] \quad f(a) \in I\}.$$

Mostrare che:

(1) $\mathcal{I}$ è un ideale di $A[x]$;
(2) I è un ideale primo di A se, e solo se, $\mathcal{I}$ è un ideale primo di $A[x]$.

3) Siano $a := 4 + 13i, b := 8 + i \in \mathbb{Z}[i]$. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra a e b.

4) Siano D un dominio euclideo di norma euclidea N e $u \in D \setminus \{0\}$. Mostrare che sono equivalenti:

(i) u è invertibile;
(ii) $\forall a \in D \setminus \{0\} \ \ N(u) \leq N(a)$;
(iii) $N(u) = N(1)$.

5) Siano D un dominio euclideo di norma euclidea N e $a, b \in D \setminus \{0\}$. Mostrare che a e b sono associati se, e solo se, a divide b e $N(a) = N(b)$.

6) Siano D un dominio ad ideali principali e $a, b \in D$. Mostrare che, se $MCD(a, b) = 1$, allora $(a) \cap (b) = (ab)$.

7) Siano K un campo e $f := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, con $a_0a_n \neq 0$, un polinomio irriducibile in $K[x]$. Mostrare che è irriducibile in $K[x]$ anche il polinomio $a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_0x^n$.

8) Stabilire se i seguenti polinomi siano irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

(1) $2x^3 - 5x + 2$;
(2) $2x^2 - 5x + 2$.

8) Sia $f(x) := x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ed I l'ideale di $\mathbb{Q}[x]$ generato da $f(x)$. Mostrare che $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo e determinare l'inverso di $[x] = x + I$.

9) Mostrare che il polinomio $f(x) := x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ è irriducibile e, indicato con J l'ideale di $\mathbb{F}_2[x]$ generato da $f(x)$, determinare la cardinalità di $\mathbb{F}_2[x]/J$.

10) Siano $g(x) := x^3 + x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ e J l'ideale di $\mathbb{F}_3[x]$ generato da $g(x)$. Dimostrare che

(1) J non è un ideale primo;
(2) $[x^2 - x - 1] = (x^2 - x - 1) + J$ è un divisore dello zero in $\mathbb{F}_3[x]/J$.

11) Dire quali dei seguenti polinomi siano irriducibili in $\mathbb{F}_5[x]$:

(1) $x^3 + x + 1$;
(2) $x^2 + 3$;
(3) $x^2 + 2$;
(4) $x^4 + 3x^3 + 2x + 4$
(5) $x^3 + 3x + 2$.

12) Dire quali dei seguenti polinomi siano irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

(1) $x^3 + 3x^2 + 9x + 6$;
(2) $4x^4 + 5x + 10$;
(3) $x^3 + 2x + 1$;
(4) $x^4 - 2x^2 + 8x + 1$;
(5) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$;
(6) $x^5 + 5x^2 - 5x + 15$;
(7) $x^4 - 10x^2 + 1$;
(8) $-3x^4 + 27x^3 - 3x^2 + 9x + 1$;
(9) $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 9$.

13) Determinare un massimo comun divisore $d(x)$ dei polinomi $f(x) := 3x^3 - x^2 + 6x - 2$ e $g(x) := x^2 - x + 1$ in $\mathbb{F}_7[x]$ ed elementi $h(x), k(x) \in \mathbb{F}_7[x]$ tali che $d(x) = h(x)f(x) + k(x)g(x)$.

14) Determinare un massimo comun divisore δ dei numeri complessi $\alpha = 4 + 13i$ e $\beta = 8 + i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed elementi $h, k \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $\delta = h\alpha + k\beta$.

15) Siano $f(x) := x^4 + 2x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$, J l'ideale generato da $f(x)$ in $\mathbb{F}_5[x]$ ed $A := \mathbb{F}_5[x]/J$.

(1) Dire se A sia un campo;
(2) determinare, se esiste, l'inverso di $[x^2 + 2]$ in A.

16) Si considerino i polinomi $f(x) := x + 2$ e $g(x) := x^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.

(1) Determinare $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $p(x)f(x) + q(x)g(x) = 1$;
(2) risolvere il sistema

$$\begin{cases} xt(x) \equiv 3x \mod (x^2 + 2x), \\ t(x) \equiv x + 1 \mod (x^2 - 1). \end{cases}$$

17) Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{F}_3[x]/J$, dove J è l'ideale generato da $x^3 + x^2 - x - 1$ in $\mathbb{F}_3[x]$.

18) Determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x]$ contenenti l'ideale generato da $x^7 - x^5 - x^4 + x^2$ e $x^5 - x$.

19) Sia J l'ideale generato da $x^3 - ax + b$ in $\mathbb{F}_3[x]$.

(1) Determinare per quali valori di a e b l'anello $\mathbb{F}_3[x]/J$ sia un campo;
(2) per $a = b = 1$, determinare se esiste un elemento invertibile di $\mathbb{F}_3[x]/J$ di ordine moltiplicativo 9 e/o 13.

20) Determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[i]$ contenenti l'ideale generato da $12 + 6i$.

21) Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/I$, dove I è l'ideale generato da $8 + 8i$ e $4 + i$.

22) Sia J l'ideale generato da $6i - 4$ e $20 + 30i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Determinare

(1) se J sia principale, primo e/o massimale;
(2) gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]/J$.