ESERCIZI SUI GRUPPI

1) Si consideri il gruppo delle unit dei quaternioni $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Si dimostri che

(1) Q_8 non è abeliano, ma per ogni $d \mid 8$ possibile trovare un sottogruppo di Q_8 di ordine d;
(2) tutti i sottogruppi di Q_8 sono normali.

2) Sia G un gruppo e $H, K \leq G$. Si dimostri che

(1) $H \cup K \leq G \iff H \subseteq K$ o $K \subseteq H$;
(2) $HK \leq G \iff HK = KH$.

3) Siano G un gruppo. Si dimostri che

$$G \text{ è abeliano} \qquad \iff \qquad \forall x, y \in G \ (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}.$$

4) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ e $T_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax + b$. Si ponga $G := \{T_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ e $N := \{T_{1b} \mid b \in \mathbb{R}\}$. Si mostri che

(1) $(G, \circ)$ è un gruppo;
(2) N è un sottogruppo normale di G;
(3) G/N è isomorfo a $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

5) Si consideri su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'operazione $*$ così definita

$$\forall\, (a, b), (c, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \qquad (a, b) * (c, d) := (a + c, ac + b + d).$$

Si mostri che

(1) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, *)$ è un gruppo;
(2) $N := \{(0, b) \mid b \in \mathbb{Q}\}$ è un sottogruppo normale di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;
(3) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/N$ è isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$.

6) Sia G un gruppo. Per ogni $x \in G$ si ponga $\tau_x : G \longrightarrow G$, $y \longmapsto xyx^{-1}$. Si mostri che

(1) $\tau_x \in \mathrm{Aut}(G)$;
(2) la funzione $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, $x \longmapsto \tau_x$ è un omomorfismo di gruppi e $\mathrm{Inn}(G) := f(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$;
(3) $\mathrm{Ker}(f) = \{g \mid g \in G,\ gh = hg \ \ \forall h \in G\} =: Z(G)$, il *centro* di G;
(4) $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

7) Sia G un gruppo e $H, K \leq G$ con H normale in G. Si dimostri che

(1) $H \cap K$ è un sottogruppo normale di K e $\langle H, K \rangle = HK$;
(2) $HK/H \cong K/(H \cap K)$.

8) Sia G un gruppo e $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Si dimostri che $f(Z(G)) = Z(G)$.

9) Sia G un gruppo per cui esiste $n > 1$ tale che $(ab)^n = a^n b^n$ per ogni $a, b \in G$. Mostrare che

(1) $G^{(n-1)} := \{x^{n-1} \mid x \in G\} \leq G$;
(2) dire se $G^{(n-1)}$ è normale in G;
(3) per ogni $x, y \in G$, $x^{n-1} y^n = y^n x^{n-1}$.