ESERCIZI SUL GRUPPO SIMMETRICO,
ORDINI DEGLI ELEMENTI, GRUPPI CICLICI

1) Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n$ e $\pi \in S_n$ ciclo di lunghezza k. Si dimostri che

(1) se k è dispari, π^2 è un ciclo di lunghezza k;
(2) se k è pari, π^2 è prodotto di due cicli di lunghezza $\frac{k}{2}$.

2) Provare che A_4 non ha sottogruppi di ordine 6.

3) Determinare tutti gli omomorfismi da A_4 in S_3.

4) Provare che $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

5) Provare che A_5 è semplice.

6) Provare che $|Z(S_n)| = 1$ per ogni $n \geq 3$.

7) Provare che $S_n = \langle (1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n) \rangle$ per ogni $n \geq 3$.

8) Sia G un gruppo finito. Determinare se una funzione biettiva $f : G \longrightarrow G$ tale che $\mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(f(x))$ per ogni $x \in G$ è un automorfismo di G.

9) Sia G un gruppo finito e f un endomorfismo di G. Si provi che $\mathrm{o}(f(x))$ divide $\mathrm{o}(x)$ per ogni $x \in G$.

10) Sia G un gruppo abeliano finito e $x, y \in G$ tali che $\mathrm{mcd}(\mathrm{o}(x), \mathrm{o}(y)) = 1$. Si provi che $\mathrm{o}(xy) = \mathrm{o}(x) \cdot \mathrm{o}(y)$.

11) Sia G un gruppo finito, N un sottogruppo normale di G e $x \in G$ tali che $\mathrm{mcd}(\mathrm{o}(x), |G/N|) = 1$. Si provi che $x \in N$.

12) Sia G un gruppo ciclico finito. Determinare $\mathrm{Aut}(G)$.

13) Si dimostri che

(1) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ammette un unico sottogruppo ciclico di ordine n per ogni n;
(2) dire se $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è ciclico.