ESERCIZI SU INTERI E STRUTTURE ALGEBRICHE

1) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$,

(a) $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$;
(b) per ogni $z \in \mathbb{Z}$, $n \mid z(z+1)(z+2)(z+3)\dots(z+n-1)$;
(c) per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a-1 \mid a^n - 1$;
(d) per ogni $a \in \mathbb{Z}$, se n è dispari, $a+1 \mid a^n + 1$;

2) Si consideri su $\mathbb{Q}^2$ l'operazione

$$\bullet : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \qquad ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \longmapsto (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

Provare che

(a) $(\mathbb{Q}^2, \bullet)$ è un monoide;
(b) per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_+$

$$(a, 0)^n = (a^n, 0) \qquad (1, b)^n = (1, nb).$$

La struttura $(\mathbb{Q}^2, \bullet)$ è commutativa?

3) Si provi che ogni dominio finito è un campo.

4) Sia G un gruppo e $H \subseteq G$. Si consideri su G la seguente relazione $\sim$ così definita

$$\forall\, x, y \in G \qquad x \sim y \iff xy^{-1} \in H.$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G se, e solo se, H è un sottogruppo di G;
(b) si provi che, per ogni $y \in G$, $[y]_\sim = Hy := \{hy \mid h \in H\}$;
(c) si provi che $\sim$ è una congruenza se, e solo se, H è un sottogruppo di G e $Hy = yH$ per ogni $y \in G$ (in tal caso si dice che H è un sottogruppo *normale* di G).

5) Poniamo $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $G := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q},\ a, d \in \mathbb{Q}^*\}$ e $H := \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q}\}$. Dire se:

(a) G è un gruppo rispetto all'usuale moltiplicazione tra matrici;
(b) H è un sottogruppo di G eventualmente normale.