Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre

Esercizi settimanali

Settimana 1 - (*consegna lunedì 4/10*)

Ex.1 - (Artin 2.1.5) Supponiamo che in un gruppo valga l'equazione $xyz = 1$. È vero che $yzx = 1$? È vero che $yxz = 1$?

Ex.2 - (Artin 2.1.11) Sia G un gruppo con prodotto $\cdot$. Definiamo il *gruppo opposto* G° come l'insieme G dotato del prodotto opposto $a \circ b = b \cdot a$. Dimostrare che G° è un gruppo.

Ex.3 - (Artin 2.2.2) Siano a, b elementi di un gruppo. Assumendo che a abbia ordine 5 e $a^3 b = ba^3$, mostrare che $ab = ba$.

Ex.4 - (Artin 2.2.10)
- (a) Se un elemento $x \in G$ ha ordine rs, qual è l'ordine di x^r? (Motivare la risposta.)
- (b) Se un elemento $x \in G$ ha ordine n, qual è l'ordine di x^r? (Motivare la risposta.)

Ex.5 - (Artin 2.2.17) Dimostrare che se ogni elemento $x \in G$ diverso dall'identità ha ordine 2, allora G è abeliano.

Ex.6 - (Artin 2.3..14) Determinare il gruppo degli automorfismi (= isomorfismi $\varphi : G \to G$) dei seguenti gruppi:
- (a) $(\mathbb{Z}, +)$;
- (b) gruppo ciclico di ordine 10;
- (c) S_3.

Ex.7 - (Artin 2.4.4) Descrivere tutti gli omomorfismi di gruppo $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, dicendo quali sono iniettivi, quali suriettivi e quali isomorfismi.

Ex.8 - (Artin 2.4.6) Si consideri la funzione $f : (\mathbb{R}, +) \to \mathbb{C}^\times$, data da $f(x) = e^{ix}$. Mostrare che f è un omomorfismo di gruppi. Determinarne nucleo e immagine.

Ex.9 - (Artin 2.6.8) Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ il sottogruppo che consiste delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogeneo $AX = 0$ (dove A è una matrice $m \times n$). Mostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo $AX = b$, se non vuoto, è una classe laterale di W.

Ex.10 - (Artin 2.6.10)
- (a) Mostrare che un sottogruppo $H \subset G$ di indice $[G : H] = 2$ è necessariamente normale.
- (b) Far vedere con un esempio che un sottogruppo di indice 3 non è necessariamente normale.