Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre

Esercizi settimanali

Settimana 10 - (*consegna lunedì 13/12*)

Ex.1 - Sia p un numero primo, $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$. Mostrare che se α è una radice di $q(x)$ in un'estensione K di $\mathbb{F}_p$, allora anche α^p annulla $q(x)$.

Ex.2 - Usare l'esercizio precedente per mostrare che $x^p - x - 1$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.

Ex.3 - Sia p un numero primo e $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ tale che $f'(x) = 0$. Mostrare che $f(x)$ non è irriducibile.

Ex.4 - I due campi $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ e $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x^2+1)$ hanno entrambi otto elementi e sono quindi isomorfi. Costruire tutti gli isomorfismi tra i due campi.

Ex.5 - Quanti sono i polinomi irriducibili monici di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{F}_3$ e in $\mathbb{F}_5$?

Ex.6 - Sia K un campo con p^n elementi, $\alpha \in K$ un generatore del gruppo ciclico $K^\times$. Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{F}_p$ ha grado n.

Ex.7 - Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $x^3 + x + 1$. Calcolare il polinomio minimo di $\alpha^2 + 1$ su $\mathbb{Q}$.

Ex.8 - Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ radici, rispettivamente, dei polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Poniamo $K = \mathbb{Q}(\alpha), L = \mathbb{Q}(\beta)$. Mostrare che $f(x)$ è irriducibile in $L[x]$ se e solo se $g(x)$ è irriducibile in $K[x]$.

Ex.9 - Sia $q(x) \in K[x]$ un polinomio irriducibile a coefficienti nel campo K di caratteristica 0. Mostrare che $q(x)$ divide $MCD(f(x), f'(x))$, dove $f(x) \in K[x]$, se e solo se $q(x)^2$ divide $f(x)$.

Ex.10 - Sia $\beta = \omega\sqrt[3]{2}$, dove $\omega = e^{2\pi i/3}$, e poniamo $K = \mathbb{Q}(\beta)$. Mostrare che l'equazione $x_1^2 + \ldots + x_k^2 = -1$ non ha soluzioni con $x_i \in K$ per ogni i.