Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre

Esercizi settimanali

Settimana 11 - (*consegna lunedì 20/12*)

Ex.1 - Sia $F \subset K$ un'estensione di campi tale $K = F(\alpha)$ con $\alpha \in K$ e sia $\beta \in K \setminus F$. Dimostrare che $F(\beta) \subseteq K$ è un'estensione algebrica.

Ex.2 - Sia $n = 2, 3$. Dimostrare che ogni elemento di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ di ordine finito ha ordine 1,2,3,4 oppure 6. Dimostrare che lo stesso non vale per $n \geq 4$.

Ex.3 - Dati A, B, C insiemi, dimostrare che esiste una biiezione canonica tra $(A^B)^C$ e $A^{B\times C}$, dove $X^Y = \{f : Y \to X\}$. Dimostrare quindi che $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ha la cardinalità delle parti di $\mathbb{R}$.

Ex.4 - Mostrare che ogni automorfismo del campo $K(x)$ che fissi le costanti $K \subset K(x)$ è della forma $\varphi(x) = (ax + b)/(cx + d)$ con $a, b, c, d \in K$.

Ex.5 - Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme (non necessariamente finito) $X \subset V$ si dice *linearmente indipendente* se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente; X è un *insieme di generatori* di V se per ogni $v \in V$ esiste un sottoinsieme finito di X di cui v è combinazione lineare. Un sottoinsieme linearmente indipendente di generatori di V è una *base* di V. Usando il lemma di Zorn, dimostrare che ogni spazio vettoriale ammette una base.