Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre

Esercizi settimanali

Settimana 2 - (*consegna lunedì 11/10*)

Ex.1 - (Artin 2.3.1) Se $a = 123$ e $b = 231$, calcolare $d = MCD(a, b)$ ed esprimere d come combinazione lineare intera $ra + sb$.

Ex.2 - (Artin 2.4.3) Siano a, b elementi di un gruppo G. Mostrare che ab e ba hanno lo stesso ordine.

Ex.3 - (Artin 2.4.10) Mostrare con un esempio che il prodotto di elementi di ordine finito in un gruppo può non avere ordine finito. Che succede se il gruppo è abeliano?

Ex.4 - (Artin 2.5.2) Mostrare che l'intersezione $H \cap K$ di sottogruppi di un gruppo G è un sottogruppo di H e che se K un sottogruppo normale di G, allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di H.

Ex.5 - (Artin 2.6.9) Mostrare che un gruppo G e il suo gruppo opposto G° sono isomorfi.

Ex.6 - (Artin 2.8.1) Sia H il sottogruppo ciclico, generato dalla permutazione $(1\,2\,3)$, del gruppo alterno A_4. Elencare le classi laterali sinistre e destre di H esplicitamente.

Ex.7 - (Artin 2.8.4) Un gruppo di ordine 35 contiene necessariamente un elemento di ordine 5? E di ordine 7?

Ex.8 - (Artin 2.8.8) Sia G un gruppo di ordine 25. Mostrare che G contiene almeno un sottogruppo di ordine 5, e che se ne contiene solo uno allora G è un gruppo ciclico.

Ex.9 - (Artin 2.11.9) Siano H, K sottogruppi di un gruppo G. Mostrare che l'insieme prodotto $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e solo se $HK = KH$.

Ex.10 - (Artin 2.12.4) Sia $H = \{\pm 1, \pm i\}$ il sottogruppo di $G = \mathbb{C}^\times$ costituito dalle radici quarte dell'unità. Descrivere esplicitamente i laterali di H in G. Il gruppo G/H è isomorfo a G?