

Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre
Esercizi settimanali

Settimana 4 - (consegna lunedì 25/10)

- Ex.1 - (Artin 6.1.11) Determinare tutti i gruppi finiti che contengono al più tre classi di coniugio
- Ex.2 - (Artin 6.1.12) Sia N un sottogruppo normale di un gruppo G , con $|N| = 5$ e $|G|$ dispari. Dimostrare che N è contenuto nel centro di G .
- Ex.3 - (Artin 6.2.5) È vero che A_5 è l'unico sottogruppo normale di S_5 ?
- Ex.4 - (Artin 6.2.7) È vero che un gruppo abeliano è semplice se e soltanto se ha ordine primo?
- Ex.5 - (Artin 6.3.14) Sia H un sottogruppo proprio di un gruppo finito G . Dimostrare che l'unione dei coniugati di H non è l'intero gruppo G .
- Ex.6 - (Artin 6.3.16) Calcolare le classi laterali doppie HgH del sottogruppo $H = \{1, s\}$ nel gruppo diedrale D_n , dove s è una simmetria ortogonale rispetto ad un asse di simmetria. Dimostrare che ogni classe laterale doppia ha due oppure quattro elementi.
- Ex.7 - (Artin 6.4.1) Quanti elementi di ordine 5 sono contenuti in un gruppo di ordine 20?
- Ex.8 - (Artin 6.4.3) Dimostrare che nessun gruppo di ordine p^2q con $p \neq q$ primi, è semplice.
- Ex.9 - (Artin 6.4.9) Sia G un gruppo di ordine $p^e m$, dove p è un numero primo, $m > 1$ e $\text{MCD}(p, m) = 1$. Dimostrare che G contiene un sottogruppo di ordine p^r per ogni intero $r \leq e$.
- Ex.10 - (Artin 6.4.18) Sia G un gruppo semplice di ordine 60.
- Mostrare che G contiene sei 5–sottogruppi di Sylow, dieci 3–sottogruppi di Sylow e cinque 2–sottogruppi di Sylow.
 - Dimostrare che G è isomorfo al gruppo alterno A_5 .