

Esercizi settimanali

Settimana 7 - (consegna lunedì 22/11)

Ex.1 - Trovare tutti gli x interi tali che

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 & (\text{mod } 15) \\ 3x \equiv 5 & (\text{mod } 8) \\ 4x \equiv 2 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

Trovare tutti gli y interi tali che

$$\begin{cases} 7y \equiv 4 & (\text{mod } 12) \\ 5y \equiv 6 & (\text{mod } 26) \end{cases}$$

Ex.2 - (Artin 11.1.6) Calcolare il massimo comun divisore dei seguenti polinomi $p(x), q(x)$ a coefficienti razionali $p(x) := x^3 - 6x^2 + x + 4$, $q(x) := x^5 - 6x + 1$.

Ex.3 - (Artin 11.1.7) Dimostrare che, per ogni campo \mathbb{F} , esistono infiniti polinomi irriducibili monici in $\mathbb{F}[x]$.

Ex.4 - (Artin 11.2.8) Trovare in $\mathbb{Z}[i]$ il massimo comun divisore di $11 + 7i$ e $18 - i$.

Ex.5 - (Artin 11.4.1) Dimostrare che i polinomi seguenti sono irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$$(b) x^3 + 6x + 12; \quad (c) 8x^3 - 6x + 1; \quad (d) x^3 + 6x^2 + 7; \quad (e) x^5 - 3x^4 + 3.$$

Ex.6 - (Artin 11.4.2) Scomporre il polinomio $x^5 + 5x + 5$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{F}_2[x]$.

Ex.7 - (Artin 11.4.3) Scomporre $x^3 + x + 1$ in fattori irriducibili in $\mathbb{F}_p[x]$ per $p = 3, 5$.

Ex.8 - (Artin 11.5.3) Scomporre i seguenti interi di Gauss in primi in $\mathbb{Z}[i]$:

$$(a) 1 - 3i; \quad (b) 10; \quad (c) 6 + 9i.$$

Ex.9 - (Artin 11.5.6) Sia p un numero primo. Dimostrare che p è un elemento primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ se e solo se il polinomio $x^2 - 3$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.

Ex.10 - (Artin 11.6.3) Siano d, d' interi distinti liberi da quadrati (ossia non divisibili per p^2 per alcun primo p). Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ sono sottocampi distinti di \mathbb{C} .