Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre

Esercizi settimanali

Settimana 8 - (*consegna lunedì 29/11*)

Ex.1 - Esprimere il gruppo abeliano $\mathbb{Z}/(12) \times \mathbb{Z}/(15) \times \mathbb{Z}/(18)$ come prodotto diretto di gruppi ciclici $\mathbb{Z}/(d_i)$, dove d_i divide d_j quando $i \leq j$.

Ex.2 - Individuare la forma canonica di Jordan della matrice complessa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

mettendo in forma canonica di Smith la matrice $xI - M$.

Ex.3 - Se $R = \mathbb{C}[x, y]$, sia $I \subset R$ l'ideale generato da x e y. Dire se I possiede una base come R-modulo.

Ex.4 - Sia R un anello. Descrivere tutti gli R-omomorfismi $R \to R$.

Ex.5 - Un R-modulo si dice semplice se gli unici suoi sottomoduli sono quelli banali. Mostrare che se S, S' sono R-moduli semplici, allora un R-omomorfismo $S \to S'$ è un isomorfismo oppure manda ogni elemento in 0.

Ex.6 - Sia U il sottogruppo del gruppo abeliano $\mathbb{Z}^3$ generato dagli elementi $(3, 1, 2), (1, 1, 3), (2, 1, 6)$. Esibire una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{Z}^3$ e interi positivi $d_1|d_2|d_3$ tali che U sia generato da d_1v_1, d_2v_2, d_3v_3.

Ex.7 - Dire quanti siano, a meno di isomorfismo, i gruppi abeliani di ordine 400.

Ex.8 - Mostrare che se il gruppo abeliano $\mathbb{Q}$ è prodotto diretto di due sottogruppi H, K, allora uno di essi coincide con $\{0\}$.

Ex.9 - Descrivere gli ideali $I \subset R$ tali che l'R-modulo R/I sia libero, cioè possieda una base come R-modulo.